Семинар 8. Вычисление определённого интеграла. Его свойства и геометрическая интерпретация.

В следующих задачах требуется вычислить определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$.

6.326

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5.$$

6.337

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi$$

Здесь для отыскания первообразной нужно использовать формулу понижения степени:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi). \text{ Получаем:}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\, \overbrace{d\varphi}^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot d\varphi} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\, d2\varphi = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1} - \overbrace{\sin 0}^{=0}\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

6.340

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

Сначала выделим полный квадрат в знаменателе:

$$4x^2 + 4x + 5 = 4\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + 1\right) =$$

$$= 4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

Замечание. Подводить под знак дифференциала „при вычислении определённого интеграла можно „без последствий".

6.346

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \left\{\begin{matrix}\text{подводим } \frac{1}{x} \text{ под знак} \\ \text{дифференциала}\end{matrix}\right\} = \int_1^e \frac{d\ln x}{1 + \ln^2 x} =$$

$$= \operatorname{arctg}(\ln x)\Big|_1^e = \operatorname{arctg}(\ln e) - \operatorname{arctg}(\ln 1) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

6.350 $\displaystyle\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

Сначала выделим полный квадрат в квадратном трёхчлене в знаменателе:

$$2+3x-2x^2 = -2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)+\frac{9}{8}+2 = -2\left(x^2-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8} =$$

$$= 2\left[\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right]$$

Получим:

$$\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{3/4}^{2} \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{3}{4}}^{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)\Bigg|_{\frac{3}{4}}^{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\overbrace{\arcsin 1}^{=\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\arcsin 0}^{=0}\Big] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Замена переменной

В определённом интеграле можно сделать замену переменной. Однако "бесплатно" сделать это не получится: при замене переменной надо пересчитывать пределы интегрирования.

Если замена переменной определяется формулой: $t = \varphi(x)$, то новые пределы интегрирования равны: $\alpha = \varphi(a)$; $\beta = \varphi(b)$.

При этом

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi^{-1}(t)\right)d\varphi^{-1}(t)}$$ или

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt}$$

Посмотрим, как применять эту формулу на примерах.

6.387 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}} = \left\{\begin{array}{l} \text{ЗАМЕНА:} \\ \sqrt{x+3}=t \\ \text{отсюда:} \\ x=t^2-3 \\ \text{пересчитываем пределы интегрирования} \to \boxed{\begin{array}{l}\sqrt{0+3}=\sqrt{3} \\ \sqrt{-2+3}=1\end{array}} \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right\} =$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t+t^3} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t\,\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{6}.$$

Замечание. Хорошие новости: зато можно не делать обратную замену.

6.395 $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{ЗАМЕНА:} \\ x=3\sin t \\ 9-x^2 = 9-9\sin^2 t = \\ = 9\cos^2 t \\ dx = 3\cos t\,dt \end{array}\right\} =$

замена пределов интегрирования $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} 3\sin t = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ 3\sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt = 81\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt \;=$$

{ применим формулу синуса двойного угла:

$$\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t \;\}$$

$$= 81\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt \;=$$

{ а теперь формулу понижения степени:

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \;\}$$

$$= \frac{81}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{81}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt - \frac{81}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\,dt =$$

$$= \frac{81}{8}\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{81}{32}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81}{8}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] - \frac{81}{32}\left[\overset{=0}{\sin 2\pi} - \overset{=0}{\sin 0}\right] =$$

$$= \frac{81\pi}{16}.$$

6.379 Можно ли интеграл $\int_0^2 x^3\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ вычислить с помощью замены $x=\sin t$?

Попробуем сделать эту замену:

$\int_0^2 x^3\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{ЗАМЕНА:} \\ x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ \sqrt[3]{1-x^2} = (\cos^2 t)^{\frac{1}{3}} \end{array}\right\}$

попытка замены пределов $\int - \int$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \sin t = 2 \Leftarrow \text{корней нет} \\ \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}}$

Интеграл не может быть вычислен указанной заменой, т.к. отрезок $[0;2]$ содержит точки, не принадлежащие множеству значений функции $\sin t$.

Формула интегрирования по частям

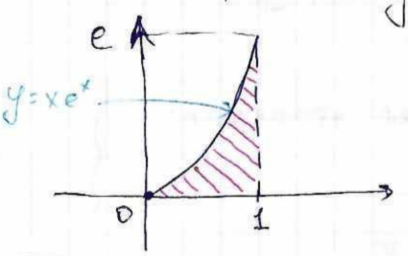
$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Применение этой формулы аналогично случаю вычисления неопределённого интеграла, но нужно не забывать подставлять пределы интегрирования.

6.399 $$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= [e-0] - e^x\Big|_0^1 = [e-0] - [e-1] = 1.$$

<u>Геометрическая</u> <u>интерпретация</u> этого факта: $\int_0^1 xe^x dx$ равен площади части ~~оху~~ плоскости, ограниченной кривой xe^x, вертикальными прямыми $x=0$ и $x=1$ и участком оси Ox.



Площадь заштрихованной фигуры равна 1.

6.346 $$\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx^2 = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 -$$

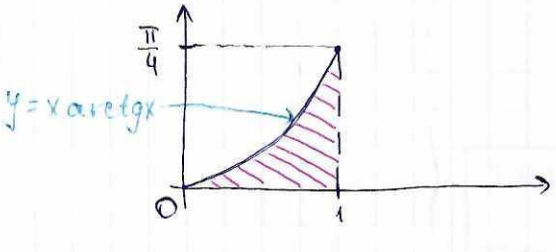
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,1 - 0\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\mathrm{arctg}\,1}_{=\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\mathrm{arctg}\,0}_{=0}\Big] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

<u>Геометрическая</u> <u>интерпретация</u> этого факта:



Площадь заштрихованной фигуры равна $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Свойства определённого интеграла

6.364 Определить знаки интегралов, не вычисляя их

б) $\int_{-1}^{1} x^3 e^x \, dx$

Пусть $f(x) = x^3$; $g(x) = e^x \geq 0$, $-1 \leq f(x) \leq 1$ на отр. $[-1; 1]$

Воспользуемся обобщённой теоремой об оценке интеграла:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx, \\ \text{если } m \leq f(x) \leq M;\ g(x) \geq 0 \end{array} \right\}$$

В нашем случае:

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \underbrace{-\left(e-\frac{1}{e}\right)}_{<0} \leq \int_{-1}^{1} x^3 e^x dx \leq \underbrace{e - \frac{1}{e}}_{>0}$$

К сожалению, использование этой теоремы не позволило нам оценить знак интеграла. Воспользуемся свойством аддитивности:

$$\int_{-1}^{1} x^3 e^x dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} x^3 e^x dx}_{<0} + \underbrace{\int_{0}^{1} x^3 e^x dx}_{>0}$$

Первый интеграл в сумме отрицателен, а второй — положителен. Чтобы оценить сумму, оценим модули подынтегральных выражений:

$|x^3 e^x|$ на отр $[-1; 0]$ $<$ $|x^3 e^x|$ на отрезке $[0; 1]$

поскольку:

$|e^x|$ на отр. $[-1; 0]$ $<$ $|e^x|$ на отрезке $[0; 1]$

Значит, $\int_{-1}^{0} x^3 e^x dx$ по модулю меньше, чем $\int_{0}^{1} x^3 e^x dx$.

Таким образом,

$$\int_{-1}^{0} x^3 e^x dx + \int_{0}^{1} x^3 e^x dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 e^x dx > 0.$$

в) $\int_{1/3}^{1} x \ln x \, dx$

На отрезке $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ подынтегральная функция отрицательна, т.к. $\ln x < 0$ при $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$ $\Rightarrow$ рассматриваемый интеграл тоже отрицателен по теореме об оценке

6.365 Сравнить интегралы, не вычисляя их

а) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

Решение этой задачи основано на теореме о монотонности определённого интеграла: чем больше подынтегральная функция, тем больше значение определённого интеграла.

$$1+x^2 > x^2$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{1+x^2} > x \quad \text{для положительных } x$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

в) $\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$

$$x \geq x^2 \quad \text{на отрезке } [0;1]$$
$$-x \leq -x^2$$
$$e^{-x} \leq e^{-x^2} \quad \text{в силу возрастания функции } e^x$$
$$e^{-x}\cos^2 x \leq e^{-x^2}\cos^2 x, \quad \text{т.к. } \cos^2 x > 0 \text{ при } x \in [0;1].$$
$$\Downarrow$$
$$\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx < \int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$$

Знак полученного неравенства строгий, поскольку по теореме о сохранении интегралом знака подынтегральной функции для выполнения строгого неравенства достаточно $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$ и существования хотя бы одной точки x_0 на отрезке $[a;b]$ такой, что $f(x_0) < g(x_0)$.

6.366 Найти среднее значение функции на заданном отрезке

а) x^3 на отрезке $[0;1]$

Здесь предполагается использование теоремы о среднем:
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a),$$
где $f(\xi)$ – среднее значение функции $f(x)$ на $[a;b]$

В данном случае среднее значение вычисляется по формуле:
$$f(\xi) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

г) $\cos^3 x$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$

В данном случае среднее значение этой функции вычисляется по формуле:
$$f(\xi) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,d\sin x =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\,d\sin x = \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3}\right) - \left(\underbrace{\sin 0}_{=0} - \underbrace{\frac{\sin^3 0}{0}}_{=0}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3\pi}.$$

6.369 Оценить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$

Воспользуемся теоремой об оценке определённого интеграла: если функцию можно оценить так:
$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a;b],$$
то интеграл оценивается так:
$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

В данном случае получаем
$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$3 \le 5+2\sin x \le 7$$
$$\sqrt{3} \le \sqrt{5+2\sin x} \le \sqrt{7}$$
$$\frac{1}{\sqrt{7}} \le \frac{1}{\sqrt{5+2\sin x}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \le \int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}} \le \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(6.370) Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$ с помощью:
а) обобщённой теоремы об оценке интеграла
б) неравенства Коши - Буняковского

а) Пусть $f(x) = \sqrt{1+x^3}$; $g(x) = \sqrt{1+x} \geq 0$.

Тогда $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

Тогда по обобщённой теореме об оценке интеграла получим:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx \leq \int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx \leq \sqrt{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx,$$

т.к. $1 \leq \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{2}$ на отрезке $[0;1]$. Отсюда получим:

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \leq \int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

б) $\int\limits_0^1 (1+x)\,dx = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$, $\int\limits_0^1 (1+x^3)\,dx = \left(x+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4}$.

{ Вспомним неравенство Коши - Буняковского:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}$$ }

Значит, в данном случае получим:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx \leq \sqrt{\int\limits_0^1 (1+x)\,dx} \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 (1+x^3)\,dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

(6.378) Не вычисляя, доказать $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} = 0$.

Эта функция является нечётной, т.к.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{1+(-x)^4} = -\frac{x^2 \sin x}{1+x^4} = -f(x)$$

Значит, $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} = 0$ (отрезок $[-3;3]$ симметричен относительно начала координат)

(9/3) 6.328, 6.336, 341, 347;

386, 392, 400, 403;

365 (б), 366 (б, в), 368, 371.