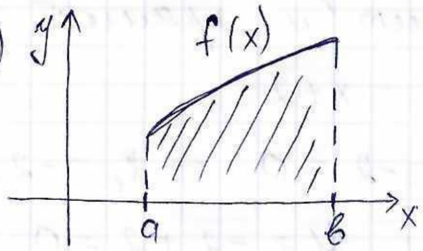
Семинар 9. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах координат

(I) Площадь в декартовой системе координат

(1)

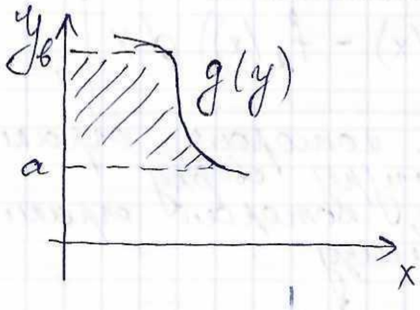


Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$.

Нужно вычислить площадь под кривой, ограниченной участком кривой $y = f(x)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и участком оси OX

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

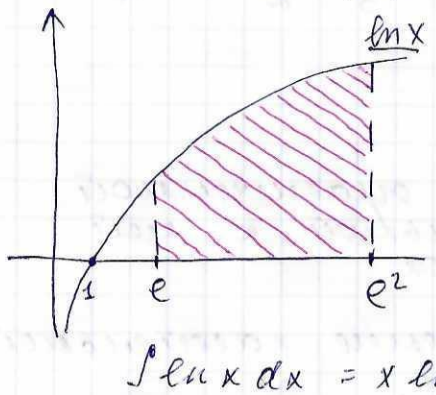
(2)



Если удобнее записать уравнение кривой в виде: $x = g(y)$, то площадь криволин. трапеции, ограниченной участком кривой $x = g(y)$, горизонтальными прямыми $y = a$, $y = b$, и участком оси OY:

$$\boxed{S = \int_a^b g(y)\,dy}$$

(3) (6.453) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.



Здесь, очевидно, случай (I).

$$S = \int_e^{e^2} \ln x\,dx$$

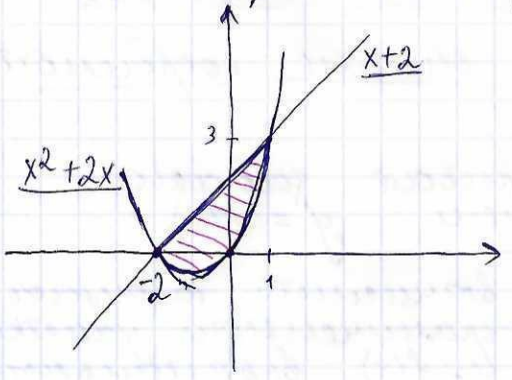
Интеграл $\int \ln x\,dx$ вычисляется по частям:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = $$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Вычислим определённый интеграл:

$$\int_e^{e^2} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_e^{e^2} = [e^2\ln e^2 - e^2] - [e\ln e - e] =$$
$$= [2e^2 - e^2] - [e - e] = e^2.$$

6.456 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.



Найдем сначала точки пересечения параболы и прямой:

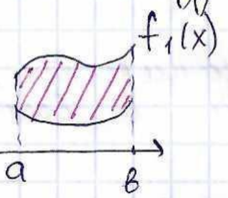
$$x^2 + 2x = x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1.$$

В точке x_1: $y = -2 + 2 = 0$

В точке x_2: $y = 1 + 2 = \cancel{0}\,3$

Воспользуемся формулой:



$$\boxed{S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx},$$

где $f_1(x)$ – функция, которая ограничивает фигуру сверху

$f_2(x)$ – функция, которая ограничивает фигуру снизу

Тогда:

$$S = \int_{-2}^{1} \Big(\underbrace{(x+2)}_{\text{прямая сверху}} - \underbrace{(x^2+2x)}_{\text{парабола снизу}}\Big) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right] - \left[\frac{8}{3} - 2 - 4\right] = -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 6 + 2 =$$

$$= -3 - \frac{1}{2} + 8 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

6.467 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью Ox.

Составим сначала уравнение касательной к кривой $y = \ln x$ в точке $x = e$.

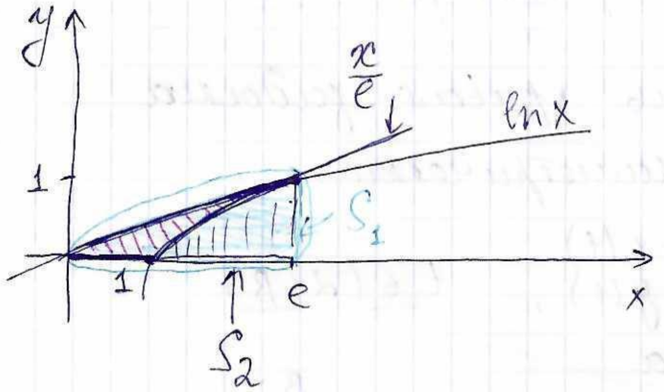
$$x_0 = e;\quad f(x_0) = \ln e = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x};\quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

Уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y = 1 + \frac{1}{e}(x - e) = 1 + \frac{x}{e} - \frac{e}{e} = \frac{x}{e}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{e}}$$ (Эта касательная проходит через начало координат)



Пусть S_1 – площадь Δ-ка, ограниченного касательной $y = \frac{x}{e}$, участком оси Ox от 0 до e и вертикальной прямой $x = e$.

S_2 – площадь криволинейного Δ-ка, ограниченного кривой $y = \ln x$, участком оси Ox от 1 до e и вертикальной прямой ~~y~~ $x = e$.

Тогда $S = S_1 - S_2$ – искомая площадь

$$S_1 = \int_0^e \frac{x}{e}\,dx = \frac{x^2}{2e}\Big|_0^e = \frac{e^2}{2e} - 0 = \frac{e}{2}.$$

Можно посчитать площадь этого Δ-ка по школьной формуле (половина произведения катетов):

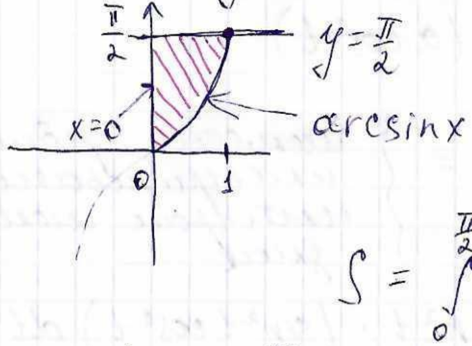
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{e}_{\text{горизонт. катет}} \cdot \underbrace{1}_{\text{вертик. катет}} = \frac{e}{2}$$

$$S_2 = \int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = [e\ln e - e] - [1\ln 1 - 1] =$$

$$= e - e - [0 - 1] = 1.$$

Тогда искомая площадь: $S = S_1 - S_2 = \frac{e}{2} - 1.$

(*) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \arcsin x$, $x = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$



Здесь удобнее использовать формулу (2):

Пусть $x = \sin y$. Тогда

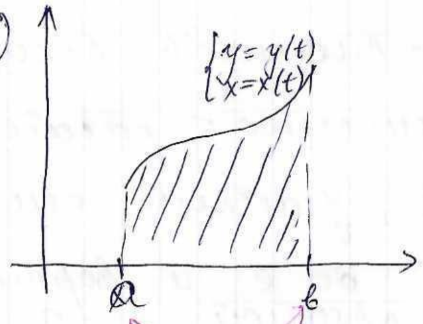
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy = (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= [\underbrace{-\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0}] - [\underbrace{-\cos 0}_{=-1}] = 1.$$

Замечание. Конечно, такую площадь можно посчитать так: $S = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) dx$, но этот интеграл посложнее.

(II) Кривая задана параметрически

(3)



Пусть кривая задана параметрически:

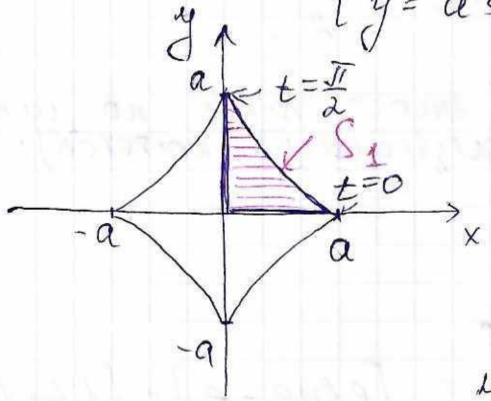
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$$

Тогда

$$\boxed{S = \int_{a}^{b} y\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dx(t) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt}$$

(6.478) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$



Будем действовать следующим образом: найдём площадь четверти астроиды S_1, а потом умножим на 4:

$$S = 4S_1.$$

Чтобы использовать формулу (3), надо найти пределы интегрирования в переменных t.

1) $\begin{matrix} x = a \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a\cos^3 t = a \\ a\sin^3 t = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{t = 0}$

2) $\begin{matrix} x = 0 \\ y = a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a\cos^3 t = 0 \\ a\sin^3 t = a \end{cases} \Rightarrow \underline{t = \frac{\pi}{2}}$

Причем $t=0$ — правый, а $t=\frac{\pi}{2}$ - левый предел $\int$-а.

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\, d(a\cos^3 t) =$$

$$= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} \text{меняем пределы} \\ \text{интегрирования,} \\ \text{интеграл меняет} \\ \text{знак} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t\,dt = 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot (\sin^2 t \cos^2 t)\,dt =$$

$$= 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \cdot \frac{\sin^2 2t}{4}\right) dt = \frac{3a^2}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 2t - \cos 2t \sin^2 2t\right) dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right) dt - \frac{3a^2}{8} \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 2t \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \left(\frac{1}{2} t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\sin 4t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{3a^2}{16} \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 2t\, d\sin 2t =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{8}\Big[\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \sin 0\Big]\right) -$$

$$-\frac{3a^2}{16}\cdot \frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{32} - \frac{3a^2}{48}\cdot\Big[\underbrace{\sin^3\pi}_{=0} - \sin^3 0\Big] = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

Итак, $S = 4S_1 = \frac{3\pi a^2}{32}\cdot 4 = \frac{3\pi a^2}{8}.$

6.479 Найти площадь петли кривой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t\,(3 - t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$$

Нам известно, что эта кривая образует петлю ⇒ она имеет точку самопересечения, т.е. существуют два различных значения параметра t_1 и t_2, для которых $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ ⇒ Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}t_1(3 - t_1^2) = \frac{1}{3}t_2(3 - t_2^2) \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $t_1 = t_2$ (не подходит, т.к. t_1 и t_2 должны быть различны) или $t_1 = -t_2$. А это подставим в 1-е уравнение:

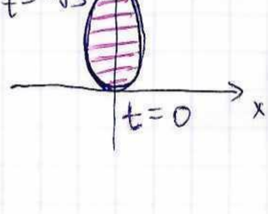
$$-\frac{1}{3}t_2(3 - t_2^2) = \frac{1}{3}t_2(3 - t_2^2) \quad \Big|\cdot 3$$

$$-3t_2 + t_2^3 = 3t_2 - t_2^3 \Rightarrow 2t_2^3 - 6t_2 = 0 \quad \Big| : 2$$

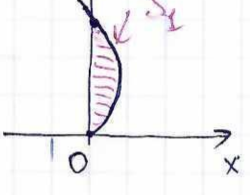
$$t_2^3 - 3t_2 = 0$$

$$t_2(t_2^2 - 3) = 0$$

$t_2 = 0$ (не подходит, т.к. в этом случае $t_1 = t_2$) или $t_2 = \sqrt{3}$. И тогда $t_1 = -\sqrt{3}$.



→



Пусть S_1 — площадь правой части (правее оси Oy) кривой. Тогда

$$S = 2S_1.$$

Здесь t изменяется от 0 до $\sqrt{3}$, т.к.

$x(0) = 0$;	$x(1) = \frac{1}{3}(3-1) > 0$;	$x(\sqrt{3}) = 0$
$y(0) = 0$;	$y(1) = 1 > 0$;	$y(\sqrt{3}) = 3.$
начальная точка	промежуточн. точка	конечная точка

Здесь тоже удобнее, по-моему, искать площадь в виде:

$$S_1 = \int_\alpha^\beta x\,dy, \quad \text{где}$$

$\alpha = 0$ – нижний предел интегрирования, $\beta = \sqrt{3}$ – верхний предел интегрирования, $\Big\}$ в перем. t

$x = \frac{1}{3} t(3 - t^2)$

$y = t^2$. Получим

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{3}} x\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} t(3-t^2)\,dt^2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} t(3-t^2)\cdot 2t\,dt =$$

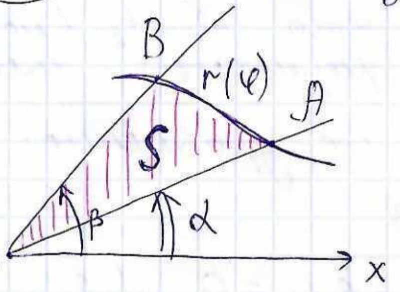
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} t^2(3-t^2)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3t^2 - t^4)\,dt = \cancel{\frac{2}{3}\int_0}$$

$$= \frac{2}{3}\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left[3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5}\right] - \frac{2}{3}\left[0 - 0\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{5} = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

$$\Rightarrow \quad S = 2S_1 = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

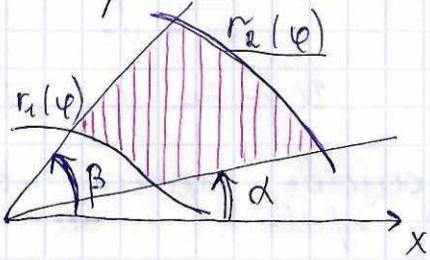
III Кривая задана в полярных координатах



(4) Если кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, то площадь сектора OAB вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi}$$

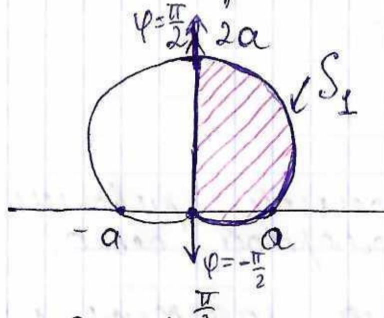
(5) Если фигура задана в полярных координатах и ограничена кривыми: $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, то площадь этой кривой:



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)d\varphi$$

6.483 Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1+\sin\varphi)$$



Пусть $S = 2S_1$,

где S_1 – правая часть кардиоиды (от $-\pi/2$ до $\pi/2$).

Воспользуемся формулой (4):

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+\sin\varphi)^2 = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\varphi)\,d\varphi\right] =$$

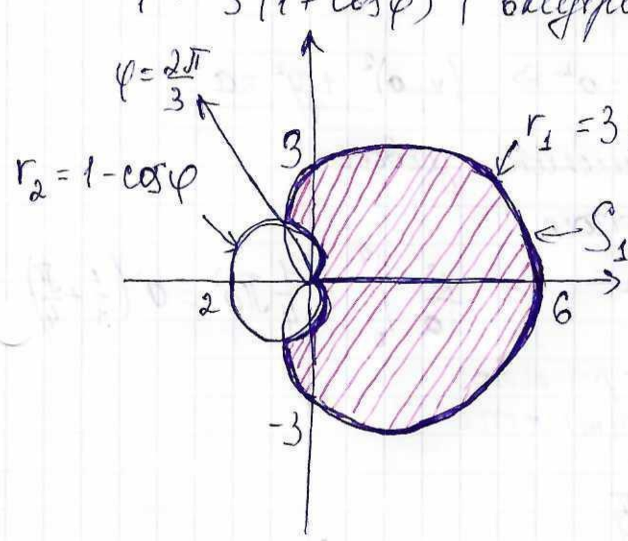
$$= \frac{a^2}{2}\left[\pi - 2[\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2} - \cos(-\tfrac{\pi}{2})}_{=0}] + \frac{1}{2}\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}[\underbrace{\sin\pi - \sin(-\pi)}_{=0}]\right] = \frac{3\pi a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow S = 2S_1 = \frac{3\pi a^2}{2}$$

(*) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$r_1 = 3(1+\cos\varphi)$ (внутри кривой) и $r_2 = 1-\cos\varphi$ (вне кривой).



Сначала найдем точки пересечения этих двух кардиоид:

$$3(1+\cos\varphi) = 1-\cos\varphi$$

$$4\cos\varphi = -2 \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ (будем считать, что φ пробегает значения от $-\pi$ до π).

Пусть $S = 2S_1$,

где S_1 – верхняя половина искомой площади (от $\varphi=0$ до $\varphi = \frac{2\pi}{3}$). ~~и до $\varphi=\pi$)~~

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[3^2(1+\cos\varphi)^2 - (1-\cos\varphi)^2\right]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[8\cos^2\varphi + 20\cos\varphi + 8\right]d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[4+4\cos2\varphi+20\cos\varphi+8\right]d\varphi =$$

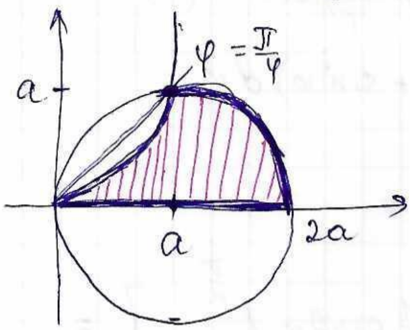
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[4\cos2\varphi+20\cos\varphi+12\right]d\varphi = 2\int_0^{2\pi/3}\left[\cos2\varphi+5\cos\varphi+3\right]d\varphi =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi + 5\sin\varphi + 3\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2\left[\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi\right] =$$

$$= 2\left[\frac{9}{4}\cdot\sqrt{3} + 2\pi\right] = \frac{9}{2}\sqrt{3} + 4\pi$$

$$S = 2S_1 = 2\left(\frac{9}{2}\sqrt{3} + 4\pi\right) = 9\sqrt{3} + 8\pi.$$

6.486 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r_1 = a\,tg\varphi\sec\varphi$; $r_2 = 2a\cos\varphi$ и полярной осью.



Решение: Сначала разберемся с тем, какими кривыми в полярной системе координат являются функции r_1 и r_2.

1) $r_1 = a\,tg\varphi\sec\varphi = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ – это парабола

Перейдем в ДСК:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right] \Rightarrow tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$r_1 = a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow r_1\cos\varphi = a\,tg\varphi$$

$$x = a\frac{y}{x} \Rightarrow \underline{y = \frac{x^2}{a}}$$

2) $r_2 = 2a\cos\varphi$ – это окружность

$$\underbrace{r^2}_{x^2+y^2} = 2a\underbrace{r\cos\varphi}_{x} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = a^2 \Rightarrow \underline{(x-a)^2 + y^2 = a^2}$$

Далее есть 2 способа решения задачи.

1) В прямых декартовых координатах

$$S = S_1 + S_2 = \underbrace{\int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx}_{\text{под параболой от 0 до } a} + \underbrace{\frac{1}{4}\pi a^2}_{\text{четвертинка окружности}} = \frac{x^3}{3a}\Bigg|_0^a + \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) В полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a\cos\varphi)^2\,d\varphi}_{\text{окружность – внешняя кривая}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\,tg\varphi\sec\varphi)^2\,d\varphi}_{\text{парабола – внутренняя кривая}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2a^2(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\,tg^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{2a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\,tg^2\varphi\,d\,tg\varphi = a^2\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} -$$

$$- \frac{a^2}{6}tg^3\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - a^2\cdot\frac{1}{6} = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

Д/З 6.457, 464, 468, 480, 481, 484, 487, 492.