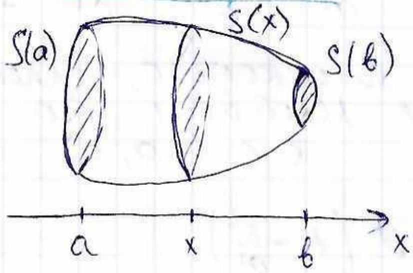
Семинар 10. Вычисление объёмов тел.

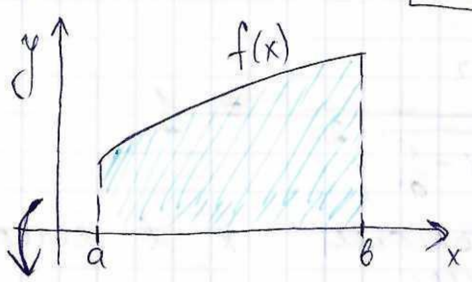
(1)



Объем тела, лежащего между плоскостями $x=a$ и $x=b$, причем площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непр. функцией:

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)\,dx}$$

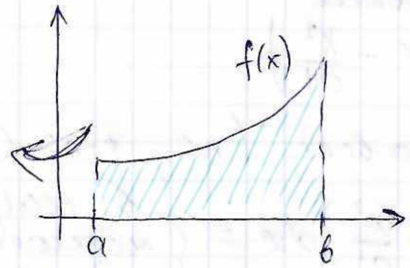
(2)



Объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox; вокруг оси Ox:

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

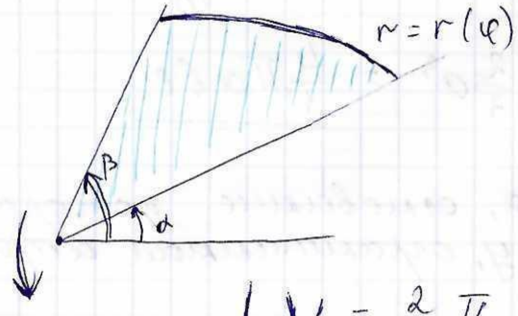
(3)



Объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox, вокруг оси Oy:

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,dx}$$

(4)

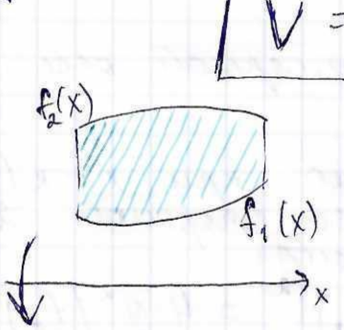


Объем тела вращения, полученного вращением криволинейного сектора, ограниченного кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, вокруг полярной оси:

$$\boxed{V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi}$$

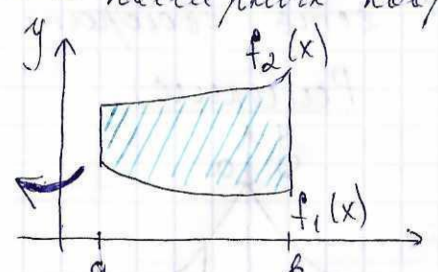
Кривая $r=r(\varphi)$ задана в полярных коор-тах.

(5)



$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx}$$

(6)



$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x\,|f_2(x)-f_1(x)|\,dx}$$

(*) Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Решение: Сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox — это эллипс. Найдем его площадь при произвольном $x \in (-a; a)$:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \Big| : \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

Таким образом, при произвольном x в сечении получается эллипс с полуосями

$$\tilde{a}=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad \tilde{b}=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Площадь такого эллипса равна

$$S(x)=\pi\tilde{a}\tilde{b}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Значит, объем эллипсоида равен (по ф-ле (1)):

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\left\{\begin{matrix}\text{в силу}\\ \text{чётности}\\ \text{подынтегр. ф-ции}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=$$

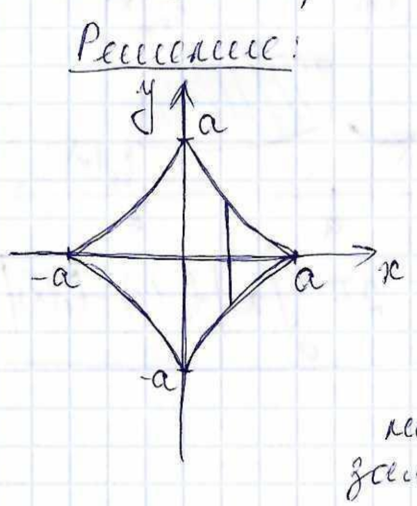
$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2\pi bc}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\underline{\frac{4}{3}\pi abc}$$

6.533 Найти объем тела, основание которого — область плоскости Oxy, ограниченная астроидой

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$

а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрат.

Решение:



Сечение плоскостью при $x=x(t_0)$ — есть квадрат со стороной $2y(t_0)$. Площадь квадрата:

$$\underline{S(t)}=(2y(t_0))^2=4y^2(t_0)$$

Объем этого тела равен

$$V(y)=\int_{-a}^{a}4y^2\,dx, \quad (\text{по формуле } (1))$$

но для вычисления придётся сделать замену и перейти к переменной t.

$$V = \int_{-a}^{a} (2y)^2\, dx = 2\int_{0}^{a} (2y)^2\, dx$$ / в силу чётности подынтегральной ф-и или симметричности графика функции)

$$\left.\begin{aligned} x=0 &: a\cos^3 t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=a &: a\cos^3 t = a \Rightarrow t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4(a\sin^3 t)^2\, d(a\cos^3 t) = 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)\, dt =$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/2} 3a^3 \sin^7 t \cos^2 t\, dt = 24a^3 \int_{0}^{\pi/2} \sin^6 t \cos^2 t \sin t\, dt =$$

(*) Поменяли пределы интегрирования — поменяли знак интеграла

$$= -24a^3 \int_{0}^{\pi/2} \sin^6 t \cos^2 t\, d\cos t =$$

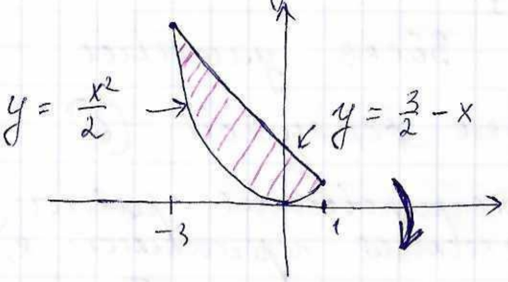
$$= -24a^3 \int_{0}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t\, d\cos t = -24a^3 \int_{0}^{\pi/2} (1 - 3\cos^2 t + 3\cos^4 t - \cos^6 t)\cos^2 t\, d\cos t =$$

$$= -24a^3 \int_{0}^{\pi/2} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t)\, d(\cos t) =$$

$$= -24a^3 \left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -24a^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{128}{105}a^3.$$

6.535 Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.



Решение: Найдём точки пересечения кривых:

$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 1.$$

$$y = \frac{x^2}{2};\quad y_1 = \frac{(-3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$y_2 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

По формуле (5) объём этого тела равен

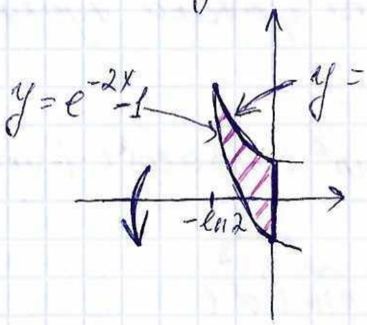
$$V_x = \pi\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi\int_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}dx$$

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 = \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{1} = \frac{91}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}dx = \frac{\pi}{20}\cdot x^5\Big|_{-3}^{1} = \frac{61}{5}\pi$$

$$V_x = V_1 - V_2 = \frac{91}{3}\pi - \frac{61}{5}\pi = \frac{272}{15}\pi.$$

(6.536) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$; $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$



<u>Решение:</u> Найдем точки пересечения кривых:

$$e^{-2x} - 1 = e^{-x} + 1$$

Замена $e^{-x} = t$ дает квадратное уравнение: $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$
$\Rightarrow x = -\ln 2$

$$y(-\ln 2) = e^{\ln 2} + 1 = 3.$$

Воспользуемся опять формулой (5):

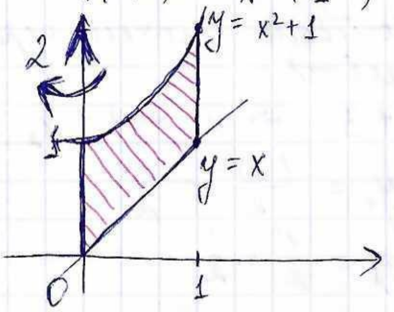
$$V_x = \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left[(e^{-x}+1)^2 - (e^{-2x}-1)^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left[e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{-2x} - 1 \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left[3e^{-2x} + 2e^{-x} - e^{-4x} \right] dx = \pi \left(-\frac{3}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-4x} \right) \Bigg|_{-\ln 2}^{0} =$$

$$= \pi \left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{4} + 6 + 4 - 4 \right) = \frac{11}{4}\pi.$$

(*) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $f_1(x) = x^2 + 1$; $f_2(x) = x$; $x = 0$; $x = 1$



<u>Решение:</u> Здесь уместно воспользоваться формулой (6).

Пределы интегрирования равны области изменения переменной x, то есть $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Получим:

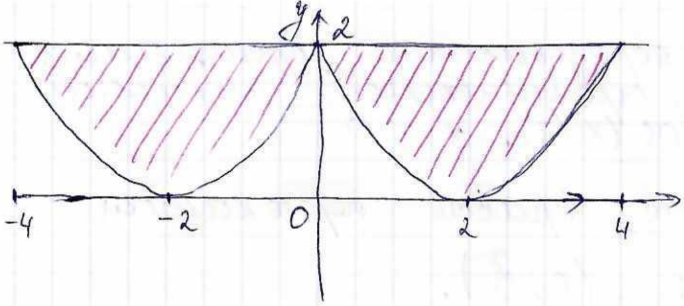
$$V_y = 2\pi \int_0^1 x\left((x^2+1) - x \right) dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^2 + x)\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5\pi}{6}.$$

(6.538) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$

<u>Решение:</u> Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ или } x = 0.$$



Искомый объем может быть получен как разность

$$V_1 - V_2,$$

где V_1 - объем цилиндра радиуса 4 и высоты 2,

V_2 - объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$ (симметричной исходной кривой относительно оси Oy) и прямыми $x = 0$, $x = 4$, вокруг оси Oy

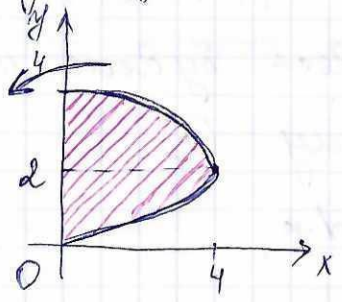
$V_1 = \pi \cdot 16 \cdot 2 = 32\pi$ (объем цилиндра)

$$V_2 = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right) dx = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{x^3}{2} - 2x^2 + 2x\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{8} - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_0^4 = 2\pi\left(32 - \frac{2}{3}\cdot 64 + 16\right) = \frac{32}{3}\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 32\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi.$$

(4) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 - 4y + x = 0$ и $x = 0$



Решение. Здесь уместно воспользоваться некоторым аналогом формулы (2). Если считать y независимой переменной, x функцией от y следующего вида:

$$x = 4y - y^2$$

то объем тела вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y)\, dy,$$ где y_1, y_2 — пределы интегрирования по переменной y.

Тогда

$$V = \pi \int_0^4 (4y - y^2)^2 dy = \pi \int_0^4 (16y^2 - 8y^3 + y^4) dy =$$

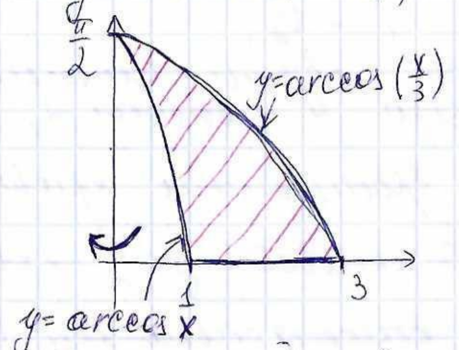
$$= \pi\left(\frac{16}{3}y^3 - 2y^4 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^4 = \pi\left(\frac{1024}{3} - 512 + \frac{1024}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi.$$

Конечно, объем этого тела можно найти и просто по формуле (6):

$$V = 2\pi \int_0^4 x\left(2 + \sqrt{4-x} - \left(2 - \sqrt{4-x}\right)\right) dx,$$

однако это сложнее.

(*) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos x$, $y = \arccos(x/3)$, $x = 0$



Решение: Кривые пересекаются в точке $(0; \frac{\pi}{2})$.

Здесь опять же выгоднее интегрировать по переменной y. Тогда $x_1 = \cos y$; $x_2 = 3\cos y$. Объем этого тела находится с помощью аналога формулы (5):

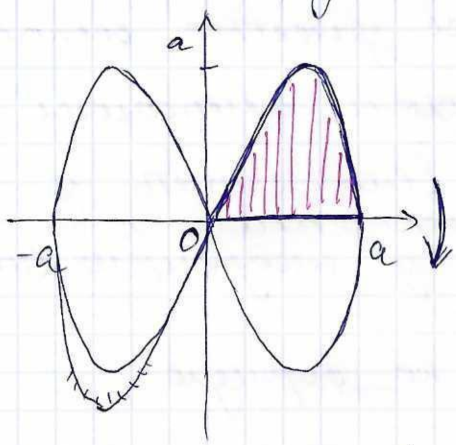
$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (x_2^2 - x_1^2)\, dy = \pi \int_0^{\pi/2} (9\cos^2 y - \cos^2 y)\, dy =$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\, dy = 8\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2y}{2}\, dy = 4\pi \left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin\pi}_{=0} - 0 - \underbrace{\frac{1}{2}\sin 0}_{=0}\right) = 2\pi^2.$$

6.541 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin 2t \end{cases}$$ и осью Ox $(0 \leq x \leq a)$.



Решение: Здесь будем использовать формулу (2):

$$V = \pi \int_0^a y^2\, dx,$$

однако для вычисления этого интеграла придется сделать замену, перейдя к переменной t:

$$\left.\begin{aligned} a\cos t = 0 &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ a\cos t = a &\Rightarrow t = 0 \end{aligned}\right] \leftarrow \text{пределы } \int\text{-а по переменной } t$$

Получим:

$$V = \pi \int_{\pi/2}^{0} a^2 \sin^2 2t\, d(a\cos t) = 4\pi a^3 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t \cos^2 t\, d\cos t =$$

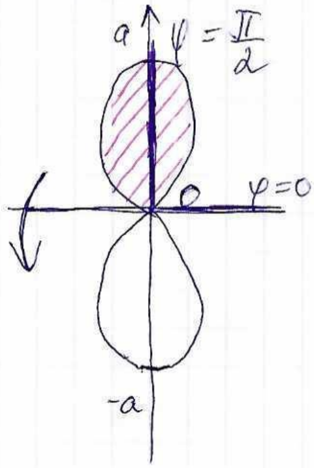
$$= 4\pi a^3 \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 t)\cos^2 t\, d\cos t = 4\pi a^3 \int_{\pi/2}^{0} (\cos^2 t - \cos^4 t)\, d\cos t =$$

$$= 4\pi a^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 4\pi a^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 4\pi a^3 \cdot \frac{2}{15} =$$

$$= \frac{8}{15}\pi a^3.$$

6.543 Найти объем тела, образованного вращением кривой $r = a\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси

Решение: Здесь нужно использовать формулу (4):



$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi,$$

так как только она дает объем тела вращения в полярных координатах.

Воспользуемся симметрией кривой: будем вращать криволинейный сектор в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, после чего полученный объем умножим на 2. Тогда

$$V = 2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}(a\sin^2\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^7\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)^3\, d\cos\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi - 1)^3\, d\cos\varphi =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^6\varphi - 3\cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi - 1)\, d\cos\varphi =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{\cos^7\varphi}{7} - \frac{3\cos^5\varphi}{5} + \cos^3\varphi - \cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1\right) = \frac{64\pi a^3}{105}$$

Д/З 6. 534, 537, 542, 544.