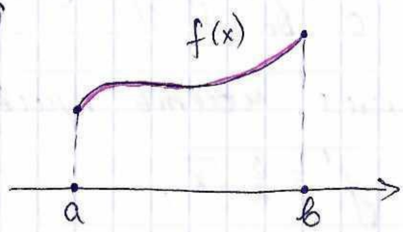
Семинар 11. Длина кривой и площадь поверхности вращения

(I) Длина кривой

(1)

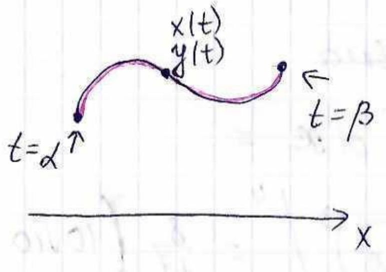


Если кривая задана в декартовых координатах:

$$y = f(x), \qquad a \le x \le b$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

(2)

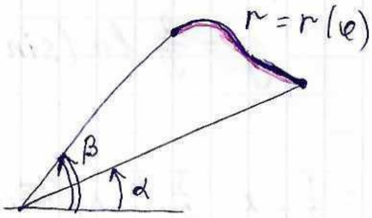


Если кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad \alpha \le t \le \beta$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

(3)



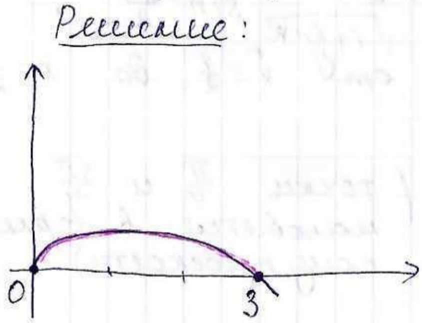
Если кривая задана в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \qquad \varphi \in [\alpha; \beta]$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

6.494 Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox

Решение:



Найдем точки пересечения с ось Ox. Для этого решим уравнение

$$\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix}\right\} \text{пределы } \int\text{-я}$$

Для нахождения длины дуги будем использовать формулу (1):

$$f(x) = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2$$

это подынтегр. функция $\Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)$

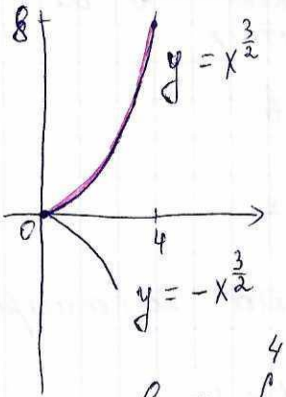
Итак, длина дуги кривой равна

$$l = \int_0^3 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{x}\, dx = \sqrt{x}\Big|_0^3 + \frac{x\sqrt{x}}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

(7) Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки с координатами $x = 4;\ y = 8$

Решение: Будем использовать формулу (1). x изменяется от 0 до 4.



Нам нужна верхняя часть кривой:

$y = x^{\frac{3}{2}}$. Тогда $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$,

$1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$

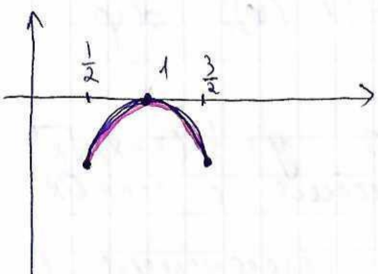
Длина дуги равна

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)^3\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

(6.500) Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{\pi}\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$

Решение: Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{3}{2}$ — пределы $\int$-ла.



Будем опять использовать формулу (1).

$$y' = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}.$$

Чтобы найти $\sqrt{1+(y')^2}$, нужно определить знак $\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \quad \Big|\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi x}{2} \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \underline{\sin\frac{\pi x}{2} > 0}$$ (точки $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ находятся в верхней полуплоскости)

$$\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}.$$

Осталось найти значение определённого интеграла:

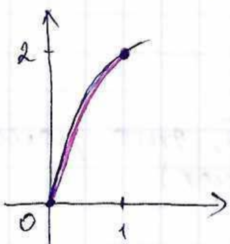
$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}\int_{1/2}^{3/2}\frac{d\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right|\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}3\pi/8}{\operatorname{tg}\pi/8}\right).$$

(*) Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.

Решение: Здесь тоже можно вычислить по формуле (1). Но



$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x} \; -$$

функция, не ограниченная при $x \to 0$.

Поэтому будем считать, что $x = \frac{y^2}{4}$, y изменяется от 0 до 2 и $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$:

$$l = \int\limits_0^2 \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = \int\limits_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{4+y^2}\,dy$$

Когда-то давно, при изучении темы "интегрирование по частям" мы выводили подобный интеграл. Я даже выписывала формулу на лекции. Настало время её вспомнить:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

Желающие могут попрактиковаться в интегрировании по частям, а я просто применю её здесь:

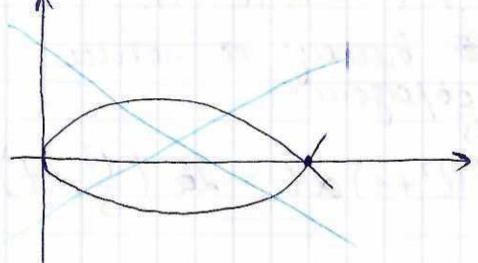
$$l = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{4+y^2}\,dy = \frac{1}{4}\left(y\sqrt{4+y^2} + 4\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cdot 2\sqrt{2} + 4\ln(2+2\sqrt{2}) - 0 - 4\ln 2\right) = \sqrt{2} + \ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2 + \ln(1+\sqrt{2}).$$

(6.506) Найти длину петли кривой

$$\begin{cases} x = a(t^2+1) \\ y = \frac{a}{3}(t^3-3t) \end{cases}, \quad a>0$$



Решение:

Сначала найдём точку самопересечения кривой.

Для этого надо найти два различных параметра t_1 и t_2 таких, что $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a(t_1^2+1) = a(t_2^2+1) \\ \frac{a}{3}(t_1^3 - 3t_1) = \frac{a}{3}(t_2^3 - 3t_2) \end{cases} \Rightarrow t_1^2 = t_2^2$$

Из уравнения $t_1^2 = t_2^2$ получим, что $t_1 = -t_2$ (параметры должны быть различны)

Подставим $t_2 = -t_1$ во второе уравнение:

$$t_1^3 - 3t_1 = (-t_1)^3 - 3(-t_1)$$

$$t_1^3 - 3t_1 = -t_1^3 + 3t_1 \Rightarrow t_1^3 - 3t_1 = 0$$

$$t_1(t_1^2 - 3) = 0$$

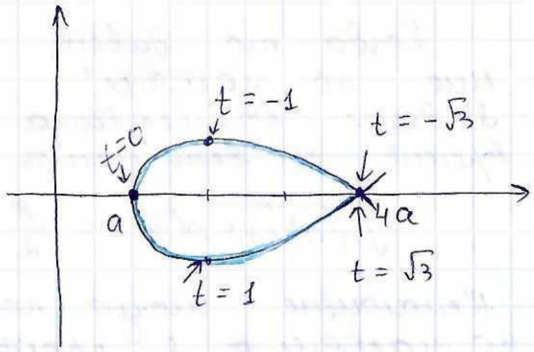
$t_1 = 0$ или $t_1 = \sqrt{3}$

(не подходит, т.к. в этом случае $t_1 = t_2 = 0$) (или $t_1 = -\sqrt{3}$, это роли не играет)

Итак, $t_1 = \sqrt{3}$; $t_2 = -\sqrt{3}$.

Вычислим значения функций $x(t)$, $y(t)$ в некоторых точках для уточнения вида кривой

t	$x(t)$	$y(t)$
$-\sqrt{3}$	$4a$	0
-1	$2a$	$\frac{2}{3}a > 0$
0	a	0
1	$2a$	$-\frac{2}{3}a < 0$
$\sqrt{3}$	$4a$	0



Для вычисления длины кривой воспользуемся формулой (2).

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= 2at \\ y'_t &= \frac{a}{3}(3t^2-3) = a(t^2-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 4a^2t^2 + a^2(t^2-1)^2 \boxed{=}$$

$$\boxed{=}\ 4a^2t^2 + a^2t^4 - 2a^2t^2 + a^2 = a^2(t^4 + 2t^2 + 1) =$$

$$= a^2(t^2+1)^2 \Rightarrow \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = a\sqrt{(t^2+1)^2} =$$

это подынтегр. ф-я $= a(t^2+1)$.

В силу симметрии кривой длину её петли можно найти следующим образом:

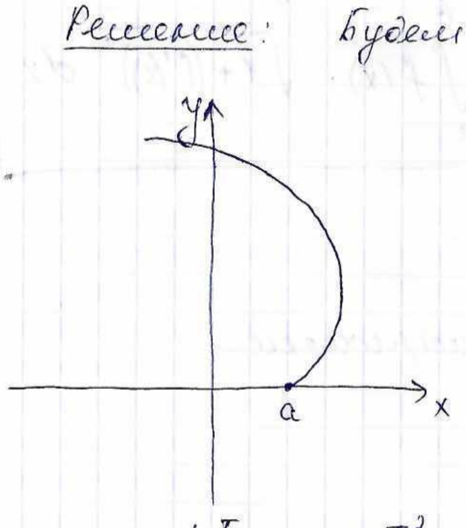
$$l = 2\int_0^{\sqrt{3}} a(t^2+1)\,dt = 2a\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)\,dt = 2a\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2a\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\,a.$$

(*) Найти длину дуги развёртки окружности от $t=0$ до $t=T$:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

Решение: Будем использовать формулу (2).



$$x'_t = a(-\cancel{\sin t} + \cancel{\sin t} + t\cos t) = at\cos t$$

$$y'_t = a(\cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} + t\sin t) = at\sin t$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2t^2$$

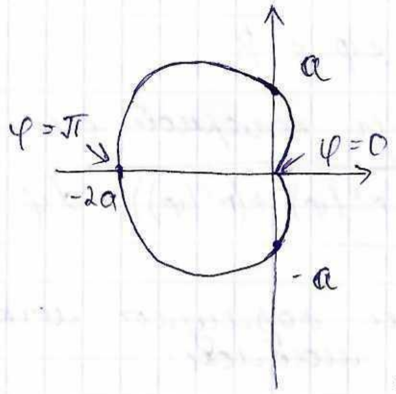
$$\Rightarrow \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = at$$

$$l = \int_0^T \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = \int_0^T at\,dt =$$

$$= a\frac{t^2}{2}\Big|_0^T = \frac{aT^2}{2}.$$

(**) Найти всю длину кардиоиды $r = a(1-\cos\varphi)$

Решение: Воспользуемся формулой (3).



$$r = a(1-\cos\varphi)$$

$$r' = a\sin\varphi$$

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi =$$

$$= a^2(1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}) = a^2(2-2\cos\varphi) =$$

$$= 2a^2(1-\cos\varphi) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 + (r')^2} = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

Воспользуемся симметрией фигуры, тогда

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 4a\int_0^\pi \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi \; \boxed{=}$$

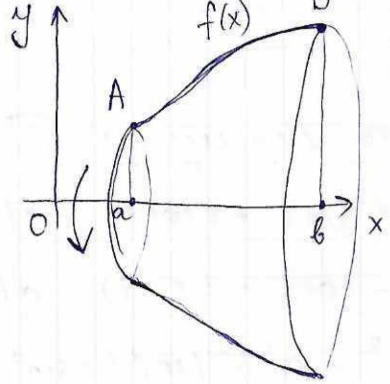
$\left\{ \text{В пределах от 0 до } \pi \ \sin\frac{\varphi}{2} > 0 \text{, поэтому модуль раскрывается со знаком "+"} \right\}$

$$\boxed{=}\; 4a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2} = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi =$$

$$= -8a(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos 0}_{=1}) = 8a$$

II Площадь поверхности вращения

4



Кривая AB задана графиком функции $y=f(x)$, $a\le x\le b$
вращение вокруг Ox:

$$\boxed{Q_x = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

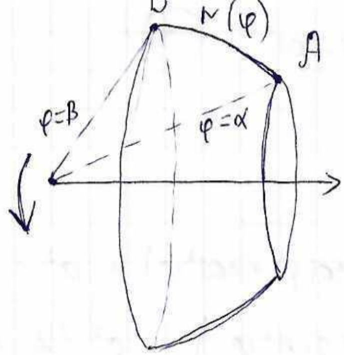
5 Кривая AB задана параметрически:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t\in[t_1,t_2]$$

вращение вокруг оси Ox:

$$Q_x = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

6



Кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$:

$r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$

вращение вокруг полярной оси:

$$Q_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Замечание. На самом деле все эти формулы легко запомнить. У них один и тот же шаблон:

$$Q_x = 2\pi\int_\alpha^\beta \underbrace{R(\alpha)}_{\text{расстояние до оси вращения}}\,dl$$

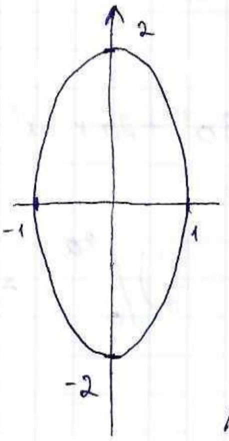
дифференциал длины дуги (подынтегральная функция из I части семинара)

Кстати, это формула для вычисления площади поверхности вращения вокруг произвольной оси

α,β - концы дуги

6.519а) Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2+y^2=4$ вокруг оси Ox:

Решение: будем использовать формулу (4):



$$4x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{1-x^2}$$

$y=2\sqrt{1-x^2}$ – верхняя половина эллипса

$$y'_x=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1+(y'_x)^2}=\sqrt{1+\frac{4x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}$$

При вращении верхней половины эллипса получается та же поверхность, что и при вращении всего эллипса, поэтому выбор только верхней половины ничего не меняет.

$$f(x)\sqrt{1+(y'_x)^2}=\cancel{\frac{|-2x|}{\sqrt{1-x^2}}}\ 2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}=\underbrace{2\sqrt{1+3x^2}}_{\text{это подынтегр функция}}$$

$$Q_x=2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1+3x^2}\,dx=4\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+3x^2}=8\pi\int_0^1\sqrt{1+3x^2}\,dx \ \ominus$$

Я уже напоминала этот интеграл в этом семинаре на странице 3, но мне не жалко, напомню ещё раз:

$$\left\{\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C\right\}$$

$$\ominus\ 8\pi\cdot\frac{1}{\sqrt3}\int_0^1\sqrt{1+3x^2}\,d(\sqrt3 x)=$$

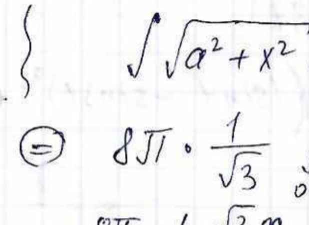
$$=\frac{8\pi}{\sqrt3}\left(\frac{\sqrt3 x}{2}\sqrt{1+3x^2}+\frac12\ln\left(\sqrt3x+\sqrt{1+3x^2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=4\pi\left(x\sqrt{1+3x^2}+\frac{1}{\sqrt3}\ln\left(\sqrt3x+\sqrt{1+3x^2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=4\pi\left(1\cdot2+\frac{1}{\sqrt3}\ln(\sqrt3+2)-0-0\right)=8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt3}\ln(2+\sqrt3).$$

6.523а) Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $9ay^2=x(3a-x)^2$ вокруг оси Ox

Решение: Уравнение верхней части кривой:



$$y=\frac{1}{3\sqrt a}\sqrt x\,(3a-x)$$

~~Пр~~ Пределы интегрирования: от $x=0$ до $x=3a$

$$y'_x=\frac12\left(\sqrt{\frac{a}{x}}-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$$

$$1+(y'_x)^2=1+\frac14\left(\frac{a}{x}-2+\frac{x}{a}\right)=\frac14\left(\frac{a}{x}+2+\frac{x}{a}\right)\ominus$$

$$\ominus\ \frac14\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2.$$

Будем использовать формулу (4)

Подынтегральная функция:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}(3a-x)}_{y(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\right)}_{\sqrt{1+(y'_x)^2}}=\frac{1}{6}(3a-x)\left(1+\frac{x}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{6a}(3a-x)(x+a)=\frac{1}{6a}(3ax+3a^2-x^2-ax)=\frac{1}{6a}(3a^2+2ax-x^2)$$

Вычислим площадь поверхности:

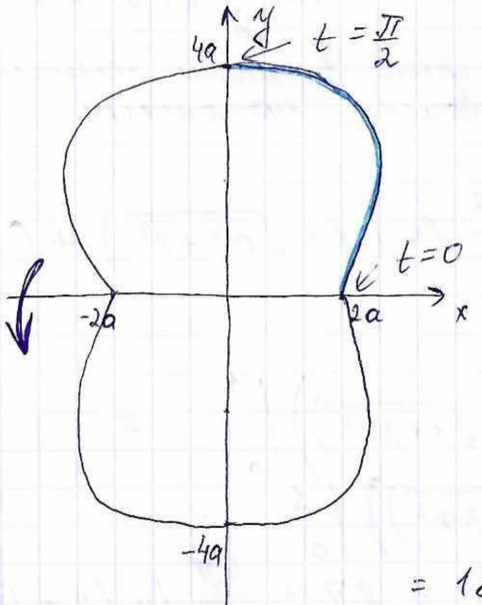
$$Q_x=2\pi\int_0^{3a}\frac{1}{6a}(3a^2+2ax-x^2)\,dx=\frac{\pi}{3a}\left(3a^2x+ax^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{3a}=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(9a^3+9a^3-\frac{27a^3}{3}\right)=3\pi a^2.$$

6.525а Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой

$$\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t)\\ y=a(3\sin t-\sin 3t)\end{cases},\qquad 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$$

Решение:



Поскольку кривая задана параметрически, будем использовать формулу (5).

$$x'_t=-3a(\sin t-\sin 3t)$$

$$y'_t=3a(\cos t-\cos 3t)$$

$$(x'_t)^2+(y'_t)^2=9a^2\left((\sin t-\sin 3t)^2+(\cos t-\cos 3t)^2\right)=$$

$$=9a^2\left[\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}-2\sin t\sin 3t+\underbrace{\sin^2 3t+\cos^2 3t}_{=1}-2\cos t\cos 3t\right]=$$

$$=18a^2(2-\underline{\sin t\sin 3t-\cos t\cos 3t})\ \boxed{=}$$

{Вы не узнали здесь формулу разности косинусов:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

?}

$$\boxed{=}\ 18a^2(1-\cos 2t)=36a^2\sin^2 t$$

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{36a^2\sin^2 t}=6a|\sin t|=6a\sin t$$

Модуль раскрывается со знаком "+", поскольку $\sin t$ при $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ положителен.

Подынтегральная функция:

$y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2} = a(3\sin t - \sin 3t)\cdot 6a\sin t =$

$= 6a^2(3\sin^2 t - \sin t\sin 3t)$ $(=)$

{ Для подчеркнутого выражения применим еще одну тригонометрическую формулу:

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\sin t\sin 3t = \frac{1}{2}(\cos 2t - \cos 4t)$ }

$(=)$ $6a^2(3\sin^2 t - \frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 4t)) = 6a^2(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t) = 6a^2(\frac{3}{2} - 2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t) = 3a^2(3-4\cos 2t+\cos 4t)$

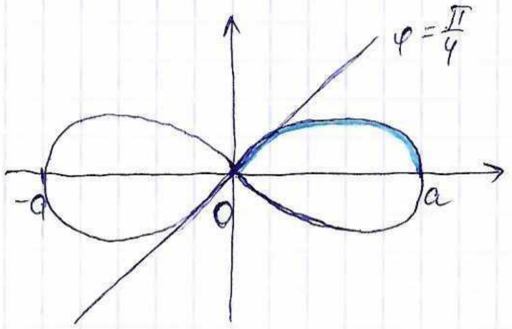
Осталось только посчитать интеграл:

$$Q_x = 2\pi\int_0^{\pi/2} 3a^2(3-4\cos 2t+\cos 4t)\,dt = 6\pi a^2\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 6\pi a^2\left[\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-0+\frac{1}{4}\cdot 0\right)-\left(0-2\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0\right)\right] = 9\pi a^2.$$

(4) Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение:



Будем использовать формулу (6), поскольку кривая задана в полярных координатах.

$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

$r' = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

$(r)^2+(r')^2 = a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} =$

$= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}(\underbrace{\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi}_{=1}) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$

$\Rightarrow \sqrt{r^2+(r')^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

Подынтегральная функция:

$r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2} = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a^2\sin\varphi$

Пределы интегрирования: от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{4}$, в силу симметрии будем интегрировать только от 0 до $\pi/4$, а потом умножим на 2. Получим:

$$Q_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} a^2\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4} = -4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) =$$

$$= 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

Д/З 6.499, 504, 511, 520, 521, 526, 529.