Семинар 13. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ДУ с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

(I) Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка наз. уравнение, связывающее искомую функцию $y(x)$, независимую переменную x, её первую производную $y'(x)$, т.е. $F(x, y, y') = 0$.

Или $\boxed{y' = f(x, y)}$ — уравнение, разрешённое относительно производной

Решение уравнения — это функция, при подстановке которой в ДУ получается верное тождество.

Интеграл уравнения — это неявное соотношение $f(x, y) = 0$, которое задаёт решение уравнения.

Процесс решения ДУ наз. его интегрированием.

Задача Коши для ОДУ первого порядка — это задача поиска решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Общее решение ДУ первого порядка — это функция $y = \varphi(x, C)$, которая:

1) является решением для любого C
2) при любом начальном условии $y(x_0) = y_0$ позволяет найти C_0 такое, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Если общее решение задано неявно, его называют общим интегралом.

Частным решением наз. функция, полученная из общего решения подстановкой некоторого C_0. Если эта функция задана неявно, её называют частным интегралом.

Значит, общее решение — это совокупность всех частных решений.

Задачи в этой части курса я буду брать из другого задачника:

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П.

Показать, что при любом действительном C заданные выражения определяют решения ДУ:

(9.1) $y = x(C - \ln|x|)$; $(x-y)dx + xdy = 0$.

Решение: Уравнение записано с помощью дифференциалов dx и dy. С помощью формулы:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

можно получить "классический" вид диф. уравнения:

$x - y + xy' = 0$.

Найдем производную функции $y = x(C - \ln|x|)$:

$$y' = C - \ln|x| + x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = C - \ln|x| - 1$$

Подставим $y = x(C - \ln|x|)$ и $y' = C - \ln|x| - 1$ в ДУ:

$$x - Cx + x\ln|x| + x(C - \ln|x| - 1) = 0.$$

Верное тождество.

Значит, эта функция действительно является решением ДУ при любом C.

(9.4) В заданном семействе функций: $y(\ln|x^2-1| + C) = 1$ выделить уравнение кривой, удовлетворяющей начальному условию: $y(0) = 1$.

Решение: Подставим $x=0$, $y=1$ в семейство функций:

$$1\cdot(\underbrace{\ln|0-1|}_{=0} + C) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Значит, искомое уравнение $y(\ln|x^2-1| + 1) = 1$ описывает искомую функцию.

(9.9) Составить ДУ семейства кривых:

$$y = x^2 + 2ax$$

Решение: Это семейство различных парабол для различных значений a. ДУ не должно содержать этого параметра, оно может содержать только x, y и y'!

Найдем y': $y' = 2x + 2a$

Выразим отсюда параметр a: $a = \frac{1}{2}(y' - 2x)$

Подставим найденное выражение для a в уравнение семейства функций: $y = x^2 + 2ax$:

$$y = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}(y'-2x)x = x^2 + y' - 2x^2 = y' - x^2$$

Отсюда $\underline{y' = y + x^2}$ — дифференциальное уравнение, которое описывает заданное семейство функций.

(7) Восстановить ДУ по его известному общему интегралу:

$$x^3 = C(x^2 - y^2).$$

Решение: Это должно быть уравнение первого порядка, поскольку общий интеграл содержит только одну произвольную постоянную C.

Продифференцируем неявную функцию $x^3 = C(x^2 - y^2)$:

$$3x^2 = C(2x - 2y \cdot y') \Rightarrow C = \frac{3x^2}{2x - 2y \cdot y'}$$

Подставим C в уравнение для семейства кривых:

$$x^3 = \frac{3x^2}{2x - 2y \cdot y'}(x^2 - y^2) \quad \Big| \cdot (2x - 2y \cdot y')$$

$$x(2x - 2y \cdot y') = 3(x^2 - y^2)$$

$$2x^2 - 2xy \cdot y' = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \underline{2xy \cdot y' = 3y^2 - x^2}$$

Это уравнение задает семейство кривых: $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

(II) __ДУ с разделяющимися переменными__

Это уравнение вида

$$y' = f(x)\,g(y) \quad \text{или} \quad f_1(x)\,g_1(y)\,dx = f_2(x)\,g_2(y)\,dy$$

План решения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\underline{g(y)} \Big| : g(y)$$

__1 случай:__ $g(y) \neq 0$

Получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Вычислив неопределенные интегралы, находим общий интеграл этого ДУ.

__2 случай.__ $g(y) = 0$.

Решив уравнение, найдем такие $y = y_0$, которые тоже могут быть решением. Поэтому подставим их в уравнение и вспомним, не потеряли ли мы решения.

$$f_1(x)\,\underline{g_1(y)}\,dx = \underline{f_2(x)}\,g_2(y)\,dy \Big| : g_1(y) f_2(x)$$

__1 случай:__ $g_1(y) f_2(x) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

__2 случай.__ $\left[\begin{array}{l} g_1(y) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{array}\right.$

Решив каждое из уравнений, найдем $x = x_0$ и $y = y_0$, которые тоже могут быть решениями. Это нужно проверить.

(9.27) $y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$

Решение: $\underbrace{y'\sqrt{1-x^2}}_{\text{функция только от } x} = \underbrace{1+y^2}_{\text{функция только от } y}$

перепишем уравнение так:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = 1+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy\,\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{"мешает"}} = \underbrace{(1+y^2)}_{\text{"мешает"}}\,dx \;\Big|:\sqrt{1-x^2}\,(1+y^2)$$

Идея метода разделения в том, чтобы в одной части уравнения оставить $f(x)dx$, а в другой — $g(y)dy$. Поэтому делим на то, что "мешает": на $f_1(x)$ — в части ур-е с dy, на $g_1(y)$ — в части ур-е с dx

$\sqrt{1-x^2} \neq 0$

$(1+y^2) \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} y = \arcsin x + C \Rightarrow \underline{\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C}$$

общий интеграл

Проверим потерянные решение:

$\sqrt{1-x^2}=0 \Rightarrow \underline{x=\pm 1}$, эти точки принадлежат общему решению.

$(1+y^2)=0 \Rightarrow$ нет решений.

Ответ: $\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C$

(9.30) $(1+y^2)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

Решение: перепишем уравнение в виде:

$$(1+y^2)x\,dx = -(1+x^2)\,dy \quad \Big|:\,(1+y^2)(1+x^2)$$

$1+y^2 \neq 0$

$1+x^2 \neq 0$

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx = -\int\frac{dy}{1+y^2}$$ (разделим и сразу интегрируем)

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = -\operatorname{arctg} y \Rightarrow \underline{\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = C}$$

Ответ: общий интеграл

Потерянных решений нет.

(9.33) $2e^x\operatorname{tg} y\,dx + (1+e^x)\sec^2 y\,dy = 0$.

Решение: Перепишем в виде:

$$2e^x\,\operatorname{tg} y\,dx = -(1+e^x)\sec^2 y\,dy \quad \Big|:\operatorname{tg} y\;:1+e^x$$

Это $\frac{1}{\cos^2 y}$

$\operatorname{tg} y \neq 0$

$1+e^x \neq 0$

$$\frac{2e^x}{1+e^x}dx = -\frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}dy$$

Получили уравнение с разделёнными переменными.

Интегрируем:

$$\int \frac{2e^x}{1+e^x}\,dx = -\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}\,dy$$

$$\int \frac{2e^x}{1+e^x}\,dx = 2\int \frac{de^x}{e^x+1} = 2\ln|e^x+1| + C$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}\,dy = \int \operatorname{tg} y\, d\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} + C$$

Получим:

$$2\ln|e^x+1| = -\frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} + C \Rightarrow \underline{2\ln|e^x+1| + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} = C}$$

общий интеграл

Потерянные решения могут появиться при $\operatorname{tg} y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pi n$. При этом $y' = 0 \to dy = 0$. Подставим в ур-е:

$$2e^x \cdot \underbrace{\operatorname{tg}(\pi n)}_{=0}\,dx = -(1+e^x)\sec^2 y\,\underbrace{dy}_{=0}$$ – верное тождество.

Ответ: $2\ln|e^x+1| + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} = C$; $y = \pi n$.

9.35 $(1+x^2)\,dy + y\sqrt{1+x^2}\,dx - xy\,dx = 0$.

Решение: Перепишем в виде:

$$(1+x^2)\,dy + y\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\,dy = y\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)dx \quad \Big/ : (1+x^2)\,y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$$

Получили уравнение с разделёнными переменными.
Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

Получим:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \ln C_1$$

константу можно записать в таком виде

Потенцируем:

$$\underbrace{y = \frac{C_1\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}}_{\text{общее решение}}$$

9.39 $y' = (4x + y + 1)^2$

Решение: Уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, с помощью подстановки:

$$4x + y + 1 = u \Rightarrow u' = 4 + y', \text{ т.е. } y' = u' - 4.$$

Получаем дифференциальное уравнение:

$$u' - 4 = u^2$$

Это ДУ с разделяющимися переменными.

$$u' = u^2 + 4, \quad u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 4 \Rightarrow du = (u^2 + 4)\,dx \quad \Big|: \underline{u^2 + 4 \neq 0}$$

$$\int \frac{du}{u^2+4} = \int dx$$

$$\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + C \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} = x + C$$

Сделаем обратную замену: $u = 4x + y + 1$.

$$\operatorname{arctg}\frac{4x+y+1}{2} = 2(x + C) \Rightarrow 4x + y + 1 = \operatorname{tg}(2x + 2C)$$

$$\underline{y = \operatorname{tg}(2x + 2C) - 4x - 1}$$

общее решение

Потерянных решений нет.

Ответ: $y = \operatorname{tg}(2x + 2C) - 4x - 1$.

9.44 Решить задачу Коши: $\begin{cases} (xy^2 + x)\,dy + (x^2y - y)\,dx = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Решение: Для решения задачи Коши надо сначала найти общее решение, а потом найти константу C.

Перепишем уравнение в виде:

$$\underline{x}(y^2 + 1)\,dy = \underline{y}(1 - x^2)\,dx \quad \Big|: xy \neq 0$$

$$\frac{y^2+1}{y}\,dy = \frac{1-x^2}{x}\,dx$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Интегрируем:

$$\int \frac{y^2+1}{y}\,dy = \int \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{y^2}{2} + \ln|y| + C$$

$$\int \frac{1-x^2}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \ln|y| + C = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + \cancel{C}$$

Потерянными решениями являются оси координат: $x = 0$, $y = 0$, но это точно не то решение, которое удовлетворяет заданному начальному условию:

$$y(1) = 1.$$

Найдем константу C, подставив в общее решение $x=1;\ y=1$:

$$\frac{1}{2}+\underbrace{\ln|1|}_{=0}+C=\underbrace{\ln|1|}_{=0}-\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{C=-1}.$$

Получим частный интеграл:

$$\frac{y^2}{2}+\ln|y|-1=\ln|x|-\frac{x^2}{2},$$ который и является решением задачи Коши.

<u>Ответ</u>: $\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left(\frac{y}{x}\right)=1.$

(III) <u>Однородные уравнения</u>

Однородной функцией степени k от двух переменных $p(x,y)$ наз. такая функция, что

$$p(\lambda x, \lambda y)=\lambda^k p(x,y) \quad \forall \lambda\neq 0$$

Например, $p(x,y)=x^2+3xy+y^2$ — однородная функция 2-ой степени:

$$p(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+3\lambda x\cdot\lambda y+(\lambda y)^2=$$
$$=\lambda^2x^2+3\lambda^2xy+\lambda^2y^2=\lambda^2\ (x^2+3xy+y^2)=\lambda^2 p(x,y)$$

Или $p(x,y)=tg\left(\frac{y}{x}\right)$ — однородная функция нулевой степени, т.к.

$$p(\lambda x,\lambda y)=tg\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=tg\left(\frac{y}{x}\right)=p(x,y).$$

<u>Однородным уравнением</u> наз. уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \ \text{где}$$

$P(x,y),\ Q(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени. Это уравнение можно свести к $y'=f(\frac{y}{x})$, поделив на x^k или y^k, где k — степень этих однородных функций.

Для решения уравнения $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ делаем замену $t=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xt$
$y'=t+xt'$,
после чего получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$t+xt'=f(t) \Rightarrow \underline{xt'=\underbrace{f(t)-t}_{\text{функция только от } t}}$$

(9.48) $y' = \frac{x-y}{x+y}$

Решение: Это однородное уравнение, т.к. $\frac{x-y}{x+y}$ — однородная функция нулевой степени.

Пусть $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$

$y' = t + xt'$.

Подставляем в ДУ:

$$t + xt' = \frac{x - xt}{x + xt} \Rightarrow t + xt' = \frac{1-t}{1+t}$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xt' = \frac{1-t}{1+t} - t = \frac{1-t}{1+t} - \frac{t+t^2}{1+t} = \frac{1-2t-t^2}{1+t}$$

Разделяем переменные:

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{1-2t-t^2}{1+t}$$

$$x\,dt = \frac{1-2t-t^2}{1+t}\,dx \quad \Big/ : x\frac{1-2t-t^2}{1+t}$$

$$\frac{(1+t)\,dt}{1-2t-t^2} = \frac{dx}{x}$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируем:

$$\int \frac{(1+t)\,dt}{1-2t-t^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(1+t)\,dt}{1-2t-t^2} = \Big| \text{Производная знам-ля: } (1-2t-t^2)' = -2-2t \Big| = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2-2t)\,dt}{1-2t-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2t-t^2)}{1-2t-t^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-2t-t^2| + C$$

Получаем:

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2t-t^2| = \ln x + \ln C$$

константу можно представить в этом виде

Потенцируем:

$$1 - 2t - t^2 = \frac{1}{C^2x^2}$$

Сделаем обратную замену:

$$1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{C^2x^2} \quad \Big/ \cdot x^2$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = \frac{1}{C^2} \Rightarrow \underline{x^2 - 2xy - y^2 = C_1}$$

заменим константу — общий интеграл

Потерянные решения: $x = 0$ и

$1 - 2t - t^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy - y^2 = 0$ — частный случай общего инт-ла

Ответ: $x^2 - 2xy - y^2 = C_1$.

(9.49) $(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2$

Решение: Это однородное уравнение, поскольку x^2+xy; $x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$ — однородные функции степени 2.

Поделим на x^2: (т.к. 2 — степень одн-ор. функций)

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

Сделаем замену: $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$
$y' = t + xt'$

Получим:

$$(1+t)(t+xt') = \sqrt{1-t^2} + t + t^2$$

Раскроем скобки:

$$\cancel{t}+t^2 + (1+t)xt' = \sqrt{1-t^2} + \cancel{t} + t^2$$

$$(1+t)xt' = \sqrt{1-t^2}$$

$$(1+t)x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1-t^2}$$

$$(1+t)x\,dt = \sqrt{1-t^2}\,dx \quad \Big|: \frac{\sqrt{1-t^2}\neq 0}{x\ \neq 0}$$

$x\neq 0$
$\sqrt{1-t^2}\neq 0$:
$$\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{dx}{x}$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Интегрируем:

$$\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + \frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t - \frac{1}{2}\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t - \sqrt{1-t^2} + C$$

Итак, $\arcsin t - \sqrt{1-t^2} + C = \ln|x|$

Сделаем обратную замену: $t = \frac{y}{x}$:

$$\underline{\arcsin\frac{y}{x} - \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + C = \ln|x|}$$

общий интеграл уравнения

(9.64) Решить задачу Коши: $xy' = y\ln\frac{y}{x}$; $y(1)=1$.

Решение: Найдём сначала общее решение этого уравнения. Это уравнение является однородным, поскольку x; $y\ln\frac{y}{x}$ — однородные функции первой степени.

Поделим на x:

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Сделаем замену $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$; $y' = t + xt'$

После замены получим:

$$t + x t' = t \ln t \Rightarrow x \frac{dt}{dx} = t \ln t - t$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dt}{t \ln t - t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{t \ln t - t} = \int \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \left| \begin{matrix} \text{Подводим } \frac{1}{t} \\ \text{под знак диф-ла} \end{matrix} \right| = \int \frac{d \ln t}{\ln t - 1} =$$

$$= \ln |\ln(t) - 1| + C$$

получим:

$$\ln |\ln t - 1| = \ln x + \ln C$$

Потенцируем: $\ln t - 1 = Cx$

Делаем обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$$\ln \frac{y}{x} = Cx + 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{Cx+1} \Rightarrow \underline{y = x e^{Cx+1}}$$ общий интеграл*

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим $x = 1$; $y = 1$ в полученное общее решение:

$$1 = 1 \cdot e^{C+1} \Rightarrow e^{C+1} = 1 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow \underline{C = -1}$$

Получаем частное решение:

Ответ: $\underline{y = x e^{1-x}}$, которое и является решением задачи Коши.

* — Точнее, даже общее решение, поскольку это явная зависимость $y = \varphi(x, C)$.

9.65 Решить задачу Коши: $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

Решение: Это однородное уравнение, поскольку функции $\sqrt{xy} - x$ и y — однородные функции первой степени.

Во всех предыдущих примерах мы делили на x^k (k — степень однородной функции), но можно делить и на y^k, если это приведёт к более простым выражениям. Сделаем это в данном случае:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}\right) dy + dx = 0.$$

Считая y независимой переменной, а $x = x(y)$ — функцией от y, получаем: $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}\right) + x' = 0$ $\left(x' = \frac{dx}{dy}\right)$

Замена: $\frac{x}{y} = t \Rightarrow x = yt$; $x' = t + yt'$ приведёт к ДУ с разделяющимися переменными: $(\sqrt{t} - t) + t + yt' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{t} = -y t'$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\cancel{\int \sqrt{t}\, dt = -\int \frac{dy}{y}} \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow 2\sqrt{t} = -\ln y + \ln C$$

Обратная замена даёт: $2\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln y = \ln C$ ← общий интеграл.

Подставив начальные условия ($x = 1$, $y = 1$), получим частный интеграл:

Ответ: $\underline{2\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln y = 2.}$

Д/З 9.3, 6, 12, 26, 28, 34, 36, 40, 45, 47, 51, 53, 66.