Семинар 14. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли

(I) Линейные ДУ

Линейное уравнение I порядка — это уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Если $q(x) = 0$, то линейное уравнение наз. однородным
$q(x) \neq 0$, то линейное ур-е наз. неоднородным
Для таких уравнений будем использовать сокращение ЛНДУ (линейное неоднородное диф. уравнение) I пор.

Замечание не путайте однородное уравнение (см. пред. семинар) и линейное однородное уравнение. Здесь однородность понимается в разном смысле.

Для решения ЛНДУ есть 2 метода:

(1) Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Пусть есть ДУ $y' + p(x)\,y = q(x)$

Решим сначала соответствующее однородное уравнение:

$$y' + p(x)\,y = 0 \quad \text{можно разделить переменные}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad / \text{интегрируем}$$

$$\ln y = \int -p(x)\,dx + \ln c$$

$$\Rightarrow y = C e^{-\int p(x)\,dx}$$

Теперь предположим, что C — не постоянная, а некоторая функция $C(x)$, но при этом общее решение имеет вид

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

Найдем функцию $c(x)$, подставив y в изначальное уравнение.

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))$$

Получаем:

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} + \cancel{C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))} + \cancel{p(x)\cdot C(x)e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

Для нахождения функции $c(x)$ достаточно проинтегрировать функцию $c'(x)$:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + \tilde{C}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + \tilde{c}\right)e^{-\int p(x)dx}}$$ — общее решение линейного уравнения

Потерянные решения, как правило, включены в общее реш-е.

(2) Метод Бернулли (также "метод подстановки", "метод $u \cdot v$")

Опять рассмотрим уравнение

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

Пусть $y = uv$ (произведение двух функций), тогда

$y' = u'v + uv'$. Подставим в ДУ:

$$u'v + \underline{uv' + p(x)\, u\, v} = q(x)$$

Вынесем отсюда за скобку u, получим

$$u'v + u\,(v' + p(x)\, v) = q(x). \qquad (*)$$

До этого шага на функции u и v мы не налагали никаких условий. Но, чтобы их все-таки найти, предположим, что функция v такая, что обнуляется скобка в последнем выражении, т.е.:

$$v' + p(x)\, v = 0.$$

Найдя отсюда v, подставив её в $(*)$:

$$u'v = q(x)$$ (Напомню, что выражение в скобке $=0$)

Таким образом, получим, что для решения ЛНДУ нужно последовательно решить 2 уравнения:

$$\begin{cases} v' + p(x)\, v = 0 \\ u'v = q(x), \end{cases}$$

каждое из которых является уравнением с разделяющимися переменными.

При этом при решении уравнения $v' + p(x)v = 0$ достаточно взять частное решение (при $C=0$), чтобы все константы учесть при решении второго уравнения.

При решении упражнений я буду чередовать использование этих методов.

(*) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$

Решение: это линейное неоднородное уравнение, где $p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x$:
$$y' \underbrace{- \tfrac{1}{x}}_{p(x)} \cdot y = \underbrace{x}_{q(x)}$$

Решим его методом вариации; сначала надо решить соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

Потенцируем: $y = Cx$

Теперь предположим, что $C = C(x)$, тогда

$y' = C'x + C$. Подставляем в ДУ:

$$\underbrace{C'x + \cancel{C}}_{y'} - \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \underbrace{\cancel{C x}}_{y} = x \Rightarrow C'x = x \Rightarrow \underline{C' = 1}.$$

Чтобы найти $C(x)$, интегрируем C':

$C(x) = \int 1 \cdot dx = x + \tilde{C}$. Подставляем в $y = Cx$:

$y = (x + \tilde{c})x = x^2 + \tilde{c}x$ — общее решение

(9.67) $y' + 2xy = xe^{-x}$

Решение: Это линейное неоднородное уравнение:

$$y' + \underbrace{2x}_{p(x)}y = \underbrace{xe^{-x}}_{q(x)}$$

Применим метод Бернулли. Пусть $y = uv$; $y' = u'v + uv'$.
Подставим в ДУ:

$$u'v + \underline{uv'} + \underline{2xuv} = xe^{-x}$$

$u'v + u\underbrace{(v' + 2xv)}_{=0} = xe^{-x}$ Вынесем за скобку u:

Получим: $\begin{cases} v' + 2xv = 0 & (1) \\ u'v = xe^{-x} & (2) \end{cases}$

Решим (1): $v' + 2xv = 0$

$\frac{dv}{dx} = -2xv$

$\frac{dv}{v} = -2x\,dx \,/ \cdot \int$

$\int \frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx$

$\ln|v| = -x^2$

$\underline{v = e^{-x^2}}$

напомню, что достаточно взять частное решение

Решим (2): $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$

$u' = x$

Чтобы найти u, проинтегрируем u':

$u = \int x\,dx = \underline{\frac{x^2}{2} + C}$

А здесь уже нужно не забыть про константу.

Обе функции найдены. Получим:

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2} \text{ — общее решение}$$

(9.72) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$

Решение: Это линейное неоднородное уравнение:

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}y = \underbrace{2\ln x + 1}_{q(x)}$$

Решим его методом вариации произвольной постоянной.
Для этого сначала решим однородное уравнение (без правой части):

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$y' = -\frac{1}{x}y$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$

или: $\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$

Потенцируем: $y = \frac{C}{x}$

Теперь предположим, что C — это функция от x, т.е. $C \to C(x)$:

$$y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}.$$ Подставим в ДУ:

$$\underbrace{\frac{C'}{x} - \cancel{\frac{C}{x^2}}}_{y'} + \frac{1}{x}\cdot\underbrace{\cancel{\frac{C}{x}}}_{y} = 2\ln x + 1 \qquad !$$

$$\frac{C'}{x} = 2\ln x + 1 \Rightarrow C' = 2x\ln x + x$$

Чтобы найти $C(x)$, проинтегрируем C':

$$C(x) = \int(2x\ln x + x)\,dx = \int \ln x\, dx^2 + \int x\,dx =$$
$$= x^2\ln x - \int x^2\, d\ln x + \frac{x^2}{2} = x^2\ln x - \int x\,dx + \frac{x^2}{2} =$$
$$= x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \tilde{C} = \underline{x^2\ln x} + \tilde{C}$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x^2\ln x + \tilde{C}\right) = x\ln x + \frac{\tilde{C}}{x}$$

9.74 $$y' = \frac{y}{x + y^3}$$

<u>Решение:</u> На первый взгляд это уравнение не является линейным, ведь в нем есть y^3, а в линейном уравнении y есть только в первой степени.

Но если считать y независимой переменной, а x — функцией от y, то

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x'},$$ тогда

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{x+y^3} \Rightarrow x' = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' - \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)}\cdot x = \underbrace{y^2}_{q(y)}$$ — ЛНДУ I порядка.

Решим его методом Бернулли. Тогда $x = uv$; $x' = u'v + uv'$, и тогда

$$u'v + \underline{uv'} - \underline{\frac{1}{y}\cdot uv} = y^2$$

Вынесем за скобку u:

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{y}v\right)}_{=0} = y^2$$

Получим: $$\begin{cases} v' - \frac{1}{y}v = 0 & (1) \\ u'v = y^2 & (2). \end{cases}$$

Решим (1):

$$v' - \frac{1}{y}v = 0$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = \ln|y|$$

$$\underline{v = y}$$

Решим (2): $u'y = y^2$

$$u' = y$$

Интегрируем:

$$u = \int y\,dy = \underline{\frac{y^2}{2} + C}$$

Нужно не забыть про константу.

Достаточно частного решения.

Получим общее решение:

$$x = uv = \left(\frac{y^2}{2} + C\right)y = \frac{y^3}{2} + Cy.$$

9.78 $\quad xy' + x^2 + xy = y$

Решение: Перепишем уравнение в виде:

$$xy' + y(x-1) = -x^2 \qquad \Big/ : \underline{x \neq 0}$$

не является потерянным решением.

$$y' + y \cdot \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{p(x)} = \underbrace{-x^2}_{q(x)}$$

Решим уравнение методом вариации постоянной. Сначала решим однородное уравнение (с нулевой правой частью):

$$y' + y \cdot \frac{x-1}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{x} \cdot y$$

$$\boxed{-\int \frac{x-1}{x}\,dx = \int\left(-1 + \frac{1}{x}\right)dx = -x + \ln|x| + C}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x-1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x-1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = -x + \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|x| + \ln C$$

Потенцируем: $\quad y = Cxe^{-x}$

Теперь считаем, что C — функция от x: $C = C(x)$.

Тогда $\quad y' = (Cxe^{-x})' = C'xe^{-x} + C\underbrace{\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)}_{=(xe^{-x})'}$

Подставим в ДУ:

$$C'xe^{-x} + \cancel{Ce^{-x}(1-x)} + \cancel{\frac{Cxe^{-x}}{x} \cdot (x-1)} = -x^2$$

Получим: $\quad C'xe^{-x} = -x^2 \Rightarrow C' = -xe^{x}$

Интегрируем:

$$C(x) = -\int x e^x\,dx = -xe^x + \int e^x\,dx = -xe^x + e^x + \tilde{C}$$

(интегр-е по частям)

Значит, общее решение имеет вид:

$$y = C(x)\, x e^{-x} = (-xe^x + e^x + \tilde{C})\, x e^{-x} = \underline{-x^2 + x + \tilde{C} x e^{-x}}$$

(9.83) Решить задачу Коши: $y' + y\,tg x = \frac{1}{\cos x}$; $y(0)=0$.

Решение: Это линейное неоднородное уравнение:

$$y' + y \underbrace{tg x}_{p(x)} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{q(x)}$$

Решим методом Бернулли. Пусть

$y = uv$; $y' = u'v + uv'$. Получим:

$$u'v + \underline{uv'} + \underline{uv\,tg x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + u(\underbrace{v' + v\,tg x}_{=0}) = \frac{1}{\cos x}$$

Получим:

$$\begin{cases} v' + v\,tg x = 0 & (1) \\ u'v = \frac{1}{\cos x} & (2) \end{cases}$$

Решим (1):

$$v' + v\,tg x = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -v\,tg x$$

$$\frac{dv}{v} = -tg x\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int tg x\,dx$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x| \ (*)$$

$$\underline{v = \cos x}$$

Решим (2):

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \underline{tg x + C}$$

(*) $-\int tg x\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{d\cos x}{\cos x} = |\cos x| + C$

Получаем общее решение: $y = uv = (tg x + C)\cos x = \underline{\sin x + C\cdot\cos x}$

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим

$y=0$; $x=0$: $\quad 0 = \sin 0 + C\cdot\cos 0 \Rightarrow \underline{C=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = \sin x}$ – частное решение

(II) Уравнения Бернулли

Это уравнения вида: $y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}$

То есть от ЛНДУ I порядка они отличаются только множителем y^{α} в правой части уравнения.

Для решения уравнений Бернулли есть 3 метода:
1) сведение к линейному
2) метод вариации произвольной постоянной
3) метод Бернулли.

Метод вариации и метод Бернулли я уже рассказывала, поэтому расскажу, как сводить уравнения Бернулли к линейным.

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha} \quad \Big| : y^{\alpha}$$

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\cdot\frac{dy}{dx} + y^{1-\alpha}\cdot p(x) = q(x)$$

Подведем $\frac{1}{y^{\alpha}}$ под знак дифференциала:

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\cdot\frac{dy}{dx} = y^{-\alpha}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)}{dx} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{dy^{1-\alpha}}{dx}$$

Получим: $$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{d(y^{1-\alpha})}{dx} + y^{1-\alpha}\cdot p(x) = q(x)$$

Замена $z = y^{1-\alpha}$ сведет уравнение к линейному для решения которого можно применить метод вариации произвольной постоянной или метод Бернулли.

В решениях упражнений буду использовать сведение к линейному.

9.88 $y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x)$

Решение: Преобразуем уравнение:

$$y' = y^4\cdot\cos x + y\cdot\operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' - y\cdot\underbrace{\operatorname{tg} x}_{p(x)} = \underbrace{\cos x}_{q(x)}\cdot\underbrace{y^4}_{y^{\alpha}} \quad \Big| : y^4 \neq 0 \text{ – Уравнение Бернулли с } \alpha = 4.$$

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^3}\cdot\operatorname{tg} x = \cos x$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{y^3}\right)}{dx} - \frac{1}{y^3}\cdot\operatorname{tg} x = \cos x$$

Замена $z = \frac{1}{y^3}$ приведет уравнение к линейному:

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{dz}{dx} - z\cdot\operatorname{tg} x = \cos x \quad \Big| \cdot(-3)$$

$$\frac{dz}{dx} + 3z\operatorname{tg} x = -3\cos x$$

Полученное уравнение решим методом вариации произв. постоянной.

Сначала решаем однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} + 3z\,tgx = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -3z\,tgx$$

$$\frac{dz}{z} = -3\,tgx\,dx$$

$$\int\frac{dz}{z} = -3\int tgx\,dx$$

$$\ln|z| = 3\ln|\cos x| + \ln C = \ln|C\cdot\cos^3 x|$$

Потенцируем:

$$z = C\cos^3 x$$

Считаем, что C — функция от x, тогда

$$z = C(x)\cos^3 x\ ;\quad z' = C'\cos^3 x + C\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$$

Подставляем в ДУ:

$$\underbrace{C'\cos^3 x - \cancel{3C\cdot\cos^2 x\cdot\sin x}}_{z'} + \underbrace{\cancel{3C(x)\cdot\cos^3 x}}_{z}\cdot tgx = -3\cos x$$

Получим $\quad C'\cos^3 x = -3\cos x \Rightarrow C' = \frac{-3}{\cos^2 x}$

Интегрируем: $\quad C(x) = \int\frac{-3}{\cos^2 x}dx = -3\,tgx + \tilde{C}$

Общее решение в переменных $(x;z)$:

$$z = C(x)\cos^3 x = (-3\,tgx + \tilde{C})\cos^3 x\ ;$$

Делаем обратную замену $z = \frac{1}{y^3}$:

$$\frac{1}{y^3} = (\tilde{C} - 3\,tgx)\cdot\cos^3 x.$$

Отсюда можно выразить y:

$$y = \left(\cos x\cdot\sqrt[3]{\tilde{C} - 3\,tgx}\right)^{-1}$$

Потерянные решения могли получиться при делении на y^4. Проверим, является ли $y=0$ решением.

$y=0;\ y'=0 \Rightarrow 0 = 0\cdot(0\cdot\cos x + tgx)$ — тождество

$\Rightarrow$ $y=0$ нужно добавить к решению.

Ответ: $y = \left(\cos x\cdot\sqrt[3]{\tilde{C} - 3\,tgx}\right)^{-1}$; $y=0$

9.92 $\quad xy' + y = 2x^2 y\ln y\cdot y'$

Решение: На первый взгляд кажется, что это уравнение не является уравнением Бернулли, поскольку содержит $\ln y$, что уравнение Бернулли содержать не может.

Будем считать y ~~произвольной~~ независимой переменной, а $x = x(y)$ — функцией от y.

$$x' = \frac{1}{y'}.\quad \text{Тогда:}$$

$$x \cdot \frac{1}{x'} + y = 2x^2 y \ln y \cdot \frac{1}{x'} \qquad \Big| \cdot x'$$

$$x + y \cdot x' = 2x^2 y \ln y \quad \big| : y \neq 0 \text{ или}$$

$$x' + \frac{x}{y} = 2x^2 \ln y \quad \text{– Уравнение Бернулли с } \alpha = 2.$$

Поделим на x^2:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2\ln y \qquad \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$-\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dy} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2\ln y$$

Замена $z = \frac{1}{x}$ сведет уравнение к линейному:

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = -2\ln y$$

Решим уравнение методом Бернулли. Пусть $z = uv$; $z' = u'v + uv'$. Получим:

$$u'v + \underline{uv'} - \underline{\frac{1}{y} \cdot uv} = -2\ln y$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{y} \cdot v\right)}_{=0} = -2\ln y$$

Получим:

$$\begin{cases} v' - \frac{1}{y} \cdot v = 0 & (1) \\ u'v = -2\ln y & (2) \end{cases}$$

Решим (1):

$$v' - \frac{1}{y} \cdot v = 0$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = \ln|y|$$

$$\underline{v = y}$$

Достаточно взять частное решение.

Решим (2):

$$u'y = -2\ln y$$

$$u' = -\frac{2\ln y}{y}$$

Интегрируем: $u = -\int \frac{2\ln y}{y}\,dy =$

$$= -\int 2\ln y \, d(\ln y) = \underline{-\ln^2 y + C}$$

не забудем про константу.

Общее решение имеет вид:

$$z = uv = y \cdot (-\ln^2 y + C)$$

Ещё нужно сделать обратную замену $\frac{1}{x} = z$:

$$\frac{1}{x} = y\,(C - \ln^2 y) \Rightarrow \underline{xy\,(C - \ln^2 y) = 1},$$

общий интеграл

Потерянные решения могли получиться при делении на y. Но $y = 0$ не принадлежит области определения $\ln y$, поэтому и потерянных решений нет.

(9.95) Решить задачу Коши: $y\,dx + (x - \frac{1}{2}x^3y)\,dy = 0$; $y(\frac{1}{2}) = 1$.

Решение: Поделим на dy:

$$y\frac{dx}{dy} + x = \frac{1}{2}x^3y \quad \Big| : y$$

$$\frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} \cdot x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{q(y)} \underbrace{x^3}_{x^\alpha}$$

Это уравнение Бернулли для функции $x(y)$ с $\alpha = 3$.

Поделим на x^3:

$$\frac{1}{x^3} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dy} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C \right.$$

Замена $\frac{1}{x^2} = z$ сведёт уравнение к линейному:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = -1.$$

Решим уравнение методом вариации произвольной постоянной. ~~Далее~~ Для этого сначала решим однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2\,dy}{y}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|y| + \ln|C|$$

Потенцируем: $z = Cy^2$.

Теперь считаем, что C — функция от y, то есть

$z = C(y)y^2$; $z' = C'y^2 + 2C(y)\cdot y$. Подставим в ДУ:

$$\underbrace{C'y^2 + \cancel{2C(y)\cdot y}}_{z'} - \underbrace{\cancel{2C(y)\cdot y^2 \cdot \frac{1}{y}}}_{\frac{2z}{y}} = -1 \Rightarrow C' = -\frac{1}{y^2}$$

Интегрируем: $C = -\int \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{y} + \tilde{C}$

Получим общий интеграл: $z = C(y)\cdot y^2 = \left(\frac{1}{y} + \tilde{C}\right)\cdot y^2 = y + \tilde{C}y^2$.

Обратная замена даёт: $\boxed{\frac{1}{x^2} = y + \tilde{C}y^2}$

Потерянные решения могли появиться при делении на x ($x = 0$) или на y ($y = 0$), но они нас не интересуют, поскольку не удовлетворяют начальным условиям.

Найдем частное решение, подставив $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$:

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 1 + \tilde{C}\cdot 1 \Rightarrow \tilde{C} = 3.$$ Получим:

$\boxed{\frac{1}{x^2} = y + 3y^2}$ — частный интеграл задачи (решение задачи Коши).

(Д/З) 9.68, 69, 75, 79, 80, 84, 87, 93, 94.