Семинар 15. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

ДУ n-го порядка — это ДУ вида

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ — общий вид

Уравнение, разрешённое относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Задача Коши для ДУ n-го порядка заключается в поиске решения ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетв. нач. условиям:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ \dots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

Общим решением ДУ (1) называется функция $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ такая, что

1) Удовлетворяет ДУ (1) при любых $C_1, \dots, C_n$

2) Для любых начальных условий (2) можно найти такие константы $C_{10}, \dots, C_{n0}$, что $y_0 = \varphi(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0})$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

По аналогии с ДУ I порядка можно ввести определения общего интеграла, частного решения, частного интеграла.

В ряде случаев можно понизить порядок ДУ.

(9.202) Показать, что выражение

$$y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (*)$$

при любых C определяет решение ДУ $xy''' = 2$.

Решение: Выражение (*) содержит 3 произвольные постоянные $\Rightarrow$ ДУ 3-го порядка.

Найдём третью производную:

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2C_1 x + C_2 = 2x\ln x + x + 2C_1 x + C_2$$

$$y'' = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 + 2C_1 = 2\ln x + 2 + 1 + 2C_1 = 2\ln x + 3 + 2C_1$$

$$y''' = \frac{2}{x} \Rightarrow xy''' = \frac{2}{x} \cdot x = 2 \text{ (сходится)}.$$

$\Rightarrow$ Это выражение определяет решение данного ДУ.

(9.210) Вывести ДУ парабол с осью, параллельной Oy.

Решение: Общий вид таких парабол: $y = b(x-a)^2$, где a, b — произвольные постоянные.

Общее решение зависит от двух произвольных постоянных $\Rightarrow$ ДУ 2-го порядка.

$y = b(x-a)^2$

$y' = 2b(x-a) \qquad x-a = \frac{y'}{2b} = \frac{y'}{y''}$

$y'' = 2b \qquad \Rightarrow b = \frac{y''}{2}$

$$y = b(x-a)^2 \Rightarrow y = \frac{y''}{2}\cdot\left(\frac{y'}{y''}\right)^2 \Rightarrow \boxed{2yy'' = (y')^2}$$

Общее решение этого ДУ — мн-во парабол $y = b(x-a)^2$

Если считать, что вершина параболы может быть в любой точке, а не только на оси Ox, то

$y = ax^2 + bx + c$ — множество таких парабол

3 константы $\Rightarrow$ уравнение третьего порядка.
Найдем третью производную:

$y' = 2ax + b$; $y'' = 2a$, $\boxed{y''' = 0}$ — это ДУ описывает множество всех парабол $y = ax^2 + bx + c$

Некоторые ДУ, допускающие понижение порядка:

(1) $y^{(n)} = f(x)$

Достаточно n раз проинтегрировать левую часть

(2) $F(x, y', y'') = 0$, т.е. уравнение явно не содержит y.

Пусть $p = y'$, $p' = y''$ $\Rightarrow$ получаем ДУ первого порядка $F(x, p, p') = 0$.

(3) $F(y, y', y'') = 0$, т.е. уравнение явно не содержит x

Пусть $p(y) = y'$ $\Rightarrow p'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'_y y'_x = p'p$

$\Rightarrow y'' = p'_x = p'p$, т.е. замена: $y' = p$; $y'' = p'p$

сводит уравнение к ДУ первого порядка $F(y, p, p') = 0$.

В следующих уравнениях будем понижать порядок.

(9.213) $y^{IV} = \frac{1}{x}$

Решение: Уравнение вида (1), достаточно 4 раза проинтегрировать левую часть:

$y''' = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_1$

$y'' = \int(\ln|x| + C_1)dx = x\ln|x| \underbrace{- x + C_1x}_{=x(C_1-1) = x\cdot\tilde{C}_1} + C_2 = x\ln|x| + \tilde{C}_1x + C_2$

$y' = \int(x\ln|x| + \tilde{C}_1x + C_2)dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| \underbrace{- \frac{x^2}{4} + \tilde{C}_1\cdot\frac{x^2}{2}} + C_2x + C_3 = \frac{x^2}{2}\ln|x| + \tilde{\tilde{C}}_1x^2 + C_2x + C_3$

2

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}\ln|x|+\tilde{\tilde{C}}_1x^2+C_2x+C_3\right)dx=\frac{x^3}{6}\ln|x|\underbrace{-\frac{x^3}{18}+\tilde{\tilde{C}}_1\cdot\frac{x^3}{3}}+C_2\cdot\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4=$$
$$=\frac{x^3}{6}\ln|x|+C_1^0x^3+\tilde{C}_2x^2+C_3x+C_4$$

В последних двух строках переобозначили постоянные:

$$-\frac{x^2}{4}+\tilde{C}_1\cdot\frac{x^2}{2}=x^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{\tilde{C}_1}{2}\right)=x^2\cdot\tilde{\tilde{C}}_1$$
$$-\frac{x^3}{18}+\tilde{\tilde{C}}_1\cdot\frac{x^3}{3}=x^3\left(-\frac{1}{18}+\frac{\tilde{\tilde{C}}_1}{3}\right)=x^3\cdot C_1^0$$

<u>Ответ</u>: $y=\frac{x^3}{6}\ln|x|+C_1^0x^3+\tilde{C}_2x^2+C_3x+C_4$

9.220 $\quad yy''+(y')^3=(y')^2$

<u>Решение</u>: Уравнение явно не содержит x (вид (3)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $y'=p$; $y''=p'p$.

Получим ДУ I порядка:

$$yp'p+p^3=p^2 \quad /:p\neq 0$$
$$yp'+p^2=p \quad /:y\neq 0$$
$$p'-\frac{p}{y}=-\frac{p^2}{y} \quad \text{– Уравнение Бернулли с } \alpha=2.$$

Поделим на p^2:

$$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{dp}{dy}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{y}$$
$$-\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dy}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{y}$$

Сделаем замену $\frac{1}{p}=z$, которая сведет уравнение к линейному:

$$\frac{dz}{dy}+\frac{z}{y}=\frac{1}{y}$$

Решим уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dy}+\frac{z}{y}=0 \Rightarrow \frac{dz}{dy}=-\frac{z}{y}$$
$$\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{y}$$

Интегрируем: $\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z|=-\ln|y|+\ln C \Rightarrow$

Потенцируем: $z=\frac{C}{y}$

Теперь пусть $C=C(y)$, тогда $z'=\frac{C'}{y}-\frac{C}{y^2}$. Получим:

$$\underbrace{\frac{C'}{y}-\cancel{\frac{C}{y^2}}}_{\frac{dz}{dy}}+\underbrace{\cancel{\frac{C}{y}\cdot\frac{1}{y}}}_{\frac{z}{y}}=\frac{1}{y} \Rightarrow C'=1.$$

Интегрируем:

$$C=\int 1\,dy=y+\tilde{C}$$

Тогда общее решение в переменных $(z;y)$:

$$z = \frac{y+\tilde{c}}{y} = 1 + \frac{\tilde{c}}{y}$$

Сделаем обратную замену $\frac{1}{p} = z$:

$$\frac{1}{p} = \frac{y+\tilde{c}}{y} \Rightarrow p = \frac{y}{y+\tilde{c}}$$

Сделаем ещё одну обратную замену: $p = y'$:

$$y' = \frac{y}{y+\tilde{c}}$$ – ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+\tilde{c}} \Rightarrow \int \frac{(y+\tilde{c})\,dy}{y} = \int dx$$

$$\int \frac{(y+\tilde{c})}{y}\,dy = \int \left(1+\frac{\tilde{c}}{y}\right) dy = y + \tilde{c}\ln|y| + C_2$$

Получим общий интеграл уравнения: $x = y + C_1 \ln|y| + C_2$

Потерянные решения могли получиться при делении на p: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \underline{y = C}$

Подставив в ДУ, убедимся, что это действительно решение.

Ещё мы делили на y, но $y = 0$ — частный случай $y = C$.

<u>Ответ</u>: $x = y + C_1 \ln|y| + C_2$; $y = C$.

9.223 $\quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

<u>Решение</u>: Это уравнение явно не содержит y (вид ②) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ <u>допускает</u> понижение порядка заменой $y' = p$; $y'' = p'$.
Получим:

$$xp' = p \ln \frac{p}{x} \;\Big|:x$$ – однородное уравнение (функции x и $p\ln\frac{p}{x}$ – однородные функции первой степени)

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$$

Сделаем замену $\frac{p}{x} = z$, тогда $p = xz$
$p' = z + xz'$

Подставим в ДУ:

$$z + xz' = z \ln z$$ – ДУ с разделяющимися переменными

Разделим переменные:

$$x\frac{dz}{dx} = z\ln z - z \Rightarrow \frac{dz}{z\ln z - z} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dz}{z\ln z - z} = \int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{d\ln z}{\ln z - 1} = \ln|\ln z - 1| + \tilde{C}$$

Получим: $\ln|\ln z - 1| + \ln C = \ln|x|$

Потенцируем: $\ln z - 1 = C_1 x$ (здесь переобозначила $C_1 = -C$)

$$\ln z = C_1 x + 1$$

Потенцируем ещё раз: $z = e^{C_1 x + 1}$

Сделаем обратную замену $z = \frac{p}{x}$:

$$\frac{p}{x} = e^{C_1 x + 1} \Rightarrow p = x e^{C_1 x + 1}$$

Сделаем ещё одну обратную замену $p = y'$:

$$y' = x e^{C_1 x + 1}$$

Интегрируем:

$$y = \int x e^{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int x e^{C_1 x + 1} d(C_1 x + 1) = \frac{1}{C_1} \int x \, d(e^{C_1 x + 1}) =$$

$$= \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} \int e^{C_1 x + 1} d(C_1 x + 1) =$$

$$= \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2 = \underbrace{\frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2}_{\text{общее решение}}$$

Потерянных решений нет.

<u>Ответ</u>: $y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$

9.237 $\; xy''' + y'' - x - 1 = 0$

<u>Решение</u>: Это уравнение третьего порядка, и оно явно не содержит y и y'. Значит, порядок уравнения можно понизить заменой:

$y'' = p$; $y''' = p'$. Получим ДУ I порядка:

$$xp' + p - x - 1 = 0$$

$$xp' + p = x + 1 \quad /: x$$

$$p' + \frac{p}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$ – линейное уравнение

Решим это уравнение методом Бернулли. Пусть $p = uv$; $p' = u'v + uv'$. Подставляем:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$u'v + v\underbrace{\left(v' + \frac{v}{x}\right)}_{=0} = 1 + \frac{1}{x}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0 & (1) \\ u'v = 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Решим (1): $v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$. Разделим переменные:

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ и интегрируем: $\ln v = -\ln|x|$

$\Rightarrow v = \frac{1}{x}$ (Напоминаю, что здесь достаточно взять частное решение)

Решим (2):

$$u' \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$u' = x + 1$$

Чтобы найти u, надо проинтегрировать u':

$$u = \int (x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

Получим $p = uv = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$

Здесь ещё нужно сделать обратную замену: $p = y'' \Rightarrow$

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$$

Чтобы найти y, нужно проинтегрировать y'' 2 раза:

$$y' = \int \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2\right) dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 \ln|x| \underbrace{- C_1 x + C_2 x}_{= x(-C_1 + C_2) = x\tilde{C}_2} + C_3$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{12}(x^3 + 6x^2) + C_1 \ln|x| + \tilde{C}_2 x + C_3 \text{ — общее решение}$$

9.248 Решить задачу Коши: $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение: Это уравнение явно не содержит y $\Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $y' = p$; $y'' = p'$. Получим:

$$(1+x^2)p' + p^2 + 1 = 0.$$

$$(1+x^2)p' = -(p^2+1) \quad \text{— ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} = -(p^2+1).$$

Разделим переменные:

$$\frac{dp}{p^2+1} = -\frac{dx}{x^2+1}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dp}{p^2+1} = -\int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \operatorname{arctg} p = -\operatorname{arctg} x + C_1$$

Чтобы было проще решать уравнение после замены, найдём константу C_1. Для этого воспользуемся начальными условиями: $x = 0$; $p = y' = 1$. Подставим:

$$\operatorname{arctg} 1 = -\operatorname{arctg} 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Получаем частное решение: $\operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$

Чтобы найти p, вычислим тангенс от левой и правой части уравнения. Кстати, вот формула тангенса разности:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}}$$

Получим:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} p) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)$$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} p) = p$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1-x}{1+x}$

В итоге имеем $p = \frac{1-x}{1+x}$. Обратная замена $p = y' \Rightarrow$

$y' = \frac{1-x}{1+x}$. Чтобы найти y, достаточно проинтегрировать y':

$$y = \int\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = \int\left(-\frac{1+x}{1+x} + \frac{2}{x+1}\right)dx = -x + 2\ln|x+1| + C_2$$

Чтобы найти C_2, подставим $x=0$, $y=1$:

$1 = -0 + 2\ln 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$. В итоге решение задачи Коши:

$\underline{y = -x + 2\ln|x+1| + 1.}$

(9.251) Решить задачу Коши: $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1+y^2}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

<u>Решение:</u> Уравнение явно не содержит $x \Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $y' = p$; $y'' = p'p$. Получим:

$\dfrac{p'p}{p} = \dfrac{2yp}{1+y^2} \Rightarrow p' = \dfrac{2yp}{1+y^2}$ – ДУ с разделяющимися переменными.

Разделим переменные:

$\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{2yp}{1+y^2} \Rightarrow \displaystyle\int\frac{dp}{p} = \int\frac{2y\,dy}{1+y^2}$. Интегрируем:

$\ln|p| = \ln|1+y^2| + \ln C_1$. Потенцируем:

$p = C_1(1+y^2)$.

Чтобы найти константу C_1 и упростить нам жизнь, подставим начальные условия $y = 0$; $p = y' = 1$:

$1 = C_1(1+0) \Rightarrow C_1 = 1$. Имеем:

$y' = 1+y^2$. (Обратная замена $p = y'$)

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{1+y^2} = dx$. Интегрируем:

$\operatorname{arctg} y = x + C_2$. Найдем C_2, подставим $y=0$; $x=0$:

$\operatorname{arctg} 0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. В итоге имеем:

$\operatorname{arctg} y = x \Rightarrow \boxed{y = \operatorname{tg} x}$ – решение задачи Коши

(Д/З) 9.203, 207, 213, 220, 223, 237, 238, 249.