

# Семинар 16. Линейные однородные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка. Фундаментальная система решений

## §1. Линейная зависимость и независимость функций.

Систему функций  $y_1, \dots, y_n$  называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальный набор коэффициентов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , таких, что

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0.$$

В противном случае систему функций  $y_1, \dots, y_n$  называется *линейно независимой*.

Для определения линейной зависимости функций используют понятие определителя Вронского.

*Определителем Вронского* системы функций  $y_1, \dots, y_n$  называют определитель функциональной матрицы

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Вронского тождественно равен нулю<sup>1</sup>, то система функций линейно-зависима, иначе — линейно независима.

В следующих задачах нужно исследовать систему функций на линейную зависимость.

**Задача 9.286.**  $x, \ln x$ .

**Решение:** Систему образуют две функции  $y_1 = x, y_2 = \ln x$ . Значит, определитель Вронского равен

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1 - \ln x \neq 0.$$

Определитель Вронского может принимать ненулевые значения, т.е. не равен нулю тождественно. Значит, система функций  $y_1, y_2$  линейно независима.

**Задача 9.291.**  $\sin x, \cos x, \sin 2x$ .

**Решение:** Систему образуют три функции  $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin 2x$ . Значит, определитель Вронского равен

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2 \cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} + I \\ &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2 \cos 2x \\ 0 & 0 & -3 \sin 2x \end{vmatrix} = -3 \sin 2x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 3 \sin 2x \neq 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Понятие тождественного равенства нулю в данном случае означает равенство нулю при любом  $x$ .

Определитель Вронского может принимать ненулевые значения, т.е. не равен нулю тождественно. Значит, система функций  $y_1, y_2, y_3$  линейно независима.

**Задача 9.293.**  $e^x, e^{x+1}$ .

**Решение:** Систему образуют две функции  $y_1 = e^x, y_2 = e^{x+1}$ . Значит, определитель Вронского равен

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{x+1} \\ e^x & e^{x+1} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Определитель Вронского тождественно равен нулю. Значит, система функций  $y_1, y_2$  линейно зависима.

**Задача 9.294.**  $x, 0, e^x$ .

**Решение:** Систему образуют три функции  $y_1 = x, y_2 = 0, y_3 = e^x$ . Значит, определитель Вронского равен

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & e^x \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Определитель Вронского тождественно равен нулю. Значит, система функций  $y_1, y_2, y_3$  линейно зависима.

## §2. Понятие линейного однородного дифференциального уравнения. Фундаментальная система решений.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

где  $a_i(x), b(x)$  — функции, непрерывные на некотором интервале  $I$ , называется *линейным уравнением  $n$ -го порядка*. Если  $b(x) \equiv 0$ , то уравнение называется *однородным* (в этом случае часто используется аббревиатура ЛОДУ), в противном случае — *неоднородным* (ЛНДУ).

Множество частных решений ЛОДУ  $n$ -го порядка образует линейное пространство размерности  $n$ . Любой набор из  $n$  линейно независимых частных решений ЛОДУ  $n$ -го порядка (то есть базис пространства решений) называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) ЛОДУ  $n$ -го порядка. Для всякого ЛОДУ существует ФСР.

Следующая теорема носит название *теоремы о структуре общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка*. Если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — некоторая ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка, то общее решение имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где  $C_i \in \mathbb{R}$  — произвольные постоянные<sup>2</sup>. По сути последняя формула представляет собой просто разложение по базису в пространстве решений.

<sup>2</sup>Нижний индекс *oo* соответствует словам “Общее решение однородного уравнения”. Возможно, Вы помните, что подобные индексы часто используются при решении однородных и неоднородных СЛАУ. Здесь мы также будем их использовать ввиду очевидной аналогии.

Таким образом, задача нахождения общего решения линейного однородного уравнения сводится к отысканию ФСР этого уравнения. В общем случае эта задача не является тривиальной, однако мы рассмотрим случаи, когда решение этой задачи возможно.

В следующих задачах требуется проверить, может ли заданная система функций образовывать ФСР некоторого ЛОДУ, и, если может, составить это ЛОДУ.

**Задача 9.298.**  $x^3, x^4$ .

**Решение:** Сначала проверим, что эти функции могут образовывать ФСР некоторого ЛОДУ. Для этого система функций  $y_1 = x^3, y_2 = x^4$  должна быть линейно независима. Проверим это с помощью определителя Вронского.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6 \neq 0.$$

Значит, система функций  $y_1 = x^3, y_2 = x^4$  линейно независима.

Пусть  $y$  — общее решение этого уравнения. Тогда функции  $y_1 = x^3, y_2 = x^4, y$  линейно зависимы (по теореме о структуре общего решения ЛОДУ общее решение может быть представлено в виде линейной комбинации функций из ФСР). Значит, определитель Вронского системы функций  $y_1 = x^3, y_2 = x^4, y$  равен нулю, то есть

$$W(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x^3 & x^4 \\ y' & 3x^2 & 4x^3 \\ y'' & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} y & x^3 & x^4 \\ y' & 3x^2 & 4x^3 \\ y'' & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = y(36x^4 - 24x^4) - y'(12x^5 - 6x^5) + y''(4x^6 - 3x^6) = 0.$$

$$y(12x^4) - y'(6x^5) + y''(x^6) = 0.$$

$$12y - 6x \cdot y' + x^2 \cdot y'' = 0.$$

**Задача 9.296.**  $1, e^{-x}$ .

**Решение:** Сначала проверим, что эти функции могут образовывать ФСР некоторого ЛОДУ. Для этого система функций  $y_1 = 1, y_2 = e^{-x}$  должна быть линейно независима. Проверим это с помощью определителя Вронского.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} \neq 0.$$

Значит, система функций  $y_1 = 1, y_2 = e^{-x}$  линейно независима.

Пусть  $y$  — общее решение этого уравнения. Тогда функции  $y_1, y_2, y$  линейно зависимы. Значит, определитель Вронского системы функций  $y_1, y_2, y$  равен нулю, то есть

$$W(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & 1 & e^{-x} \\ y' & 0 & -e^{-x} \\ y'' & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} y & 1 & e^{-x} \\ y' & 0 & -e^{-x} \\ y'' & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = -y' \cdot e^{-x} + y'' \cdot (-e^{-x}) = 0.$$

$$y'' + y' = 0.$$

К этой задаче мы еще вернемся, чтобы предложить другой метод решения.

### §3. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Рассмотрим ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Особенностью этого уравнения является то, что решения такого уравнения могут быть найдены без интегрирования, только с помощью алгебраических операций.

*Характеристическим уравнением* ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

где производная  $n$ -го порядка функции  $y$  заменяется на  $\lambda^n$ .

Взаимосвязь между корнями характеристического уравнения и решениями ЛОДУ  $n$ -го порядка отражена в таблице.

Корень характеристического уравнения	Решение ЛОДУ
$\lambda_0$ — действительный простой корень	$y_1 = e^{\lambda_0 x}$
$\lambda_0$ — действительный корень кратности $r$	$y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = x e^{\lambda_0 x}, \dots,$ $y_r = x^{r-1} e^{\lambda_0 x}$
$\alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-сопряженных корней	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
$\alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-сопряженных корней кратности $r$ каждый	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$ $y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$ $y_{2r-1} = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Для самого простого случая, ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + by' + cy = 0,$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

является квадратным уравнением, а значит, в зависимости от знака дискриминанта возможны три случая вида общего решения.

Дискриминант	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического уравнения	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1$ кратности 2	$\alpha \pm \beta i$
Общее решение	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$(C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$	$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

В следующих задачах по корням характеристического уравнения нужно составить линейное однородное дифференциальное уравнение и выписать его общее решение.

**Задача 9.315.**  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ .

**Решение:** Составим сначала характеристическое уравнение. Многочлен, корни которого равны  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ , имеет вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Чтобы составить дифференциальное уравнение, заменим  $\lambda^2$  на  $y''$ ,  $\lambda$  на  $y'$  и 1 на  $y$ . Получим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительны и различны. Значит, корню  $\lambda_1 = 3$  соответствует функция из ФСР  $y_1 = e^{3x}$ :

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{3x},$$

аналогично, корню  $\lambda_2 = -2$  соответствует функция из ФСР  $y_2 = e^{-2x}$ :

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow y_2 = e^{-2x}.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

**Задача 9.317.**  $\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i$ .

**Решение:** Составим сначала характеристическое уравнение. Многочлен, корни которого равны  $\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i$ , имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= ((\lambda - 3) - 2i)((\lambda - 3) + 2i) = \\ &= (\lambda - 3)^2 - (2i)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 13. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Чтобы составить дифференциальное уравнение, заменим  $\lambda^2$  на  $y''$ ,  $\lambda$  на  $y'$  и 1 на  $y$ . Получим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения является пара комплексно-сопряженных чисел. Значит, этой паре комплексно-сопряженных корней соответствуют функции из ФСР  $y_1 = e^{3x} \cos 2x$ ,  $y_2 = e^{3x} \sin 2x$ :

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{3x} \sin 2x.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x.$$

**Задача 9.319.**  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ .

**Решение:** Составим сначала характеристическое уравнение. Многочлен, корни которого равны  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ , имеет вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda(\lambda - 4)^2 = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda = 0.$$

Чтобы составить дифференциальное уравнение, заменим  $\lambda^3$  на  $y'''$ ,  $\lambda^2$  на  $y''$  и  $\lambda$  на  $y'$ . Получим ЛОДУ третьего порядка:

$$y''' - 8y'' + 16y' = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = 4$ . Первому корню  $\lambda_1 = 0$  (простой действительный корень) соответствует функция из ФСР  $y_1 = 1$ :

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{0 \cdot x} = 1,$$

корню  $\lambda_2 = 4$  кратности 2 соответствуют две функции из ФСР:  $y_1 = e^{4x}$ ,  $y_2 = x e^{4x}$ :

$$\lambda_{2,3} = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = x e^{4x}.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 x e^{4x}.$$

Теперь ненадолго вернемся к задаче 9.296. Я обещала другой метод решения этой задачи.

**Задача 9.296.** Проверить, может ли система функций

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-x}$$

образовывать ФСР некоторого ЛОДУ, и, если может, составить это ЛОДУ.

**Решение:** Для проверки линейной независимости функций достаточно записать определитель Вронского и раскрыть его, убедившись, что он не равен нулю (мы уже делали это раньше). Эти функции соответствуют следующим корням характеристического уравнения:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,$$

$$y_2 = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -1.$$

Составим характеристическое уравнение. Многочлен, корни которого равны  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ , имеет вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Чтобы составить дифференциальное уравнение, заменим  $\lambda^2$  на  $y''$  и  $\lambda$  на  $y'$ . Получим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + y' = 0.$$

Сравнив ответы, полученные разными методами, убедимся, что они совпадают.

**Задача 9.300.** Проверить, может ли система функций

$$y_1 = 1, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x$$

образовывать ФСР некоторого ЛОДУ, и, если может, составить это ЛОДУ.

**Решение:** Для проверки линейной независимости функций достаточно записать определитель Вронского и раскрыть его, убедившись, что он не равен нулю. Для записи линейного однородного уравнения, конечно, можно записать определитель четвертого порядка и раскрыть его. Но, пожалуй, будем действовать иначе. Эти функции соответствуют следующим корням характеристического уравнения:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,$$

$$y_2 = \sin x = e^{0 \cdot x} \sin x, y_3 = e^{0 \cdot x} \cos x \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,3} = 0 \pm i = \pm i.$$

Составим характеристическое уравнение. Многочлен, корни которого равны  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i$ , имеет вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda(\lambda^2 + 1) = \lambda^3 + \lambda.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda = 0.$$

Чтобы составить дифференциальное уравнение, заменим  $\lambda^3$  на  $y'''$  и  $\lambda$  на  $y'$ . Получим ЛОДУ третьего порядка:

$$y''' + y' = 0.$$

В последующих задачах нужно найти общее решение ЛОДУ.

**Задача 9.322.**  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0.$$

Корнями этого уравнения является пара комплексно-сопряженных чисел

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i.$$

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i \Rightarrow y_1 = e^{-3x} \cos 2x, y_2 = e^{-3x} \sin 2x.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x.$$

**Задача 9.324.**  $3y'' - 2y' - 8y = 0$ .

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{4}{3}.$$

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 &\Rightarrow y_1 = e^{2x}, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{3} &\Rightarrow y_2 = e^{-\frac{4}{3}x}. \end{aligned}$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}.$$

**Задача 9.327.**  $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$ .

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 1,$$

который можно найти подбором, и

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i,$$

которые можно найти, решив уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ . Многочлен  $\lambda^2 - 4\lambda + 13$  получается при делении  $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13$  на  $\lambda - 1$ .

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^x,$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i \quad \Rightarrow \quad y_2 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_3 = e^{2x} \sin 3x.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x.$$

**Задача 9.333.**  $y^{IV} + 8y''' + 16y' = 0$ .

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$$

или

$$\lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа  $\lambda_1 = 0$  (простой действительный корень) и

$$\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i,$$

два комплексно-сопряженных корня кратности 2 каждый.

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,$$

$$\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x, \quad y_4 = x \cos 2x, \quad y_5 = x \sin 2x.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 \cdot x \cos 2x + C_5 \cdot x \sin 2x.$$

**Задача 9.336.**  $y^{VI} + 2y^V + y^{IV} = 0$ .

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^6 + 2\lambda^5 + \lambda^4 = 0$$

или

$$\lambda^4(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2,3,4} = 0,$$

действительный корень кратности 4, и

$$\lambda_{5,6} = -1,$$

действительный корень кратности 2.

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_{1,2,3,4} = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, y_4 = x^3,$$

$$\lambda_{5,6} = -1 \Rightarrow y_5 = e^{-x}, y_6 = xe^{-x}.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{-x} + C_6xe^{-x}.$$

В оставшихся задачах нужно найти решение задач Коши (решение дифференциального уравнения с начальными условиями).

**Задача 9.337.**  $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = y'(0) = 1.$

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4,$$

два простых действительных корня.

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^x,$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow y_2 = e^{4x}.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, найдем сначала производную общего решения:

$$y'_{oo} = C_1e^x + 4C_2e^{4x}.$$

Теперь подставим  $x = 0, y = 1, y' = 1$  в  $y_{oo}$  и  $y'_{oo}$ . Получим систему линейных уравнений на коэффициенты  $C_i$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 4C_2 = 1. \end{cases}$$

Решением системы являются числа  $C_1 = 1, C_2 = 0$ . Подставив значения констант в общее решение, получим частное решение:

$$y = e^x.$$

**Задача 9.339.**  $y''' - y' = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1.$

**Решение:** Характеристическое уравнение этого ДУ имеет вид:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad \text{или} \quad \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1,$$

три простых действительных корня.

Этим корням соответствуют следующие функции из ФСР:

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = e^x,$$

$$\lambda_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = e^{-x}.$$

Общее решение равно линейной комбинации функций из ФСР с произвольными коэффициентами:

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, найдем сначала две первые производные общего решения:

$$y'_{oo} = C_2 e^x - C_3 e^{-x}, \quad y''_{oo} = C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Теперь подставим  $x = 0$ ,  $y = 3$ ,  $y' = -1$ ,  $y'' = 1$  в  $y_{oo}$ ,  $y'_{oo}$  и  $y''_{oo}$ . Получим систему линейных уравнений на коэффициенты  $C_i$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 3, \\ C_2 - C_3 = -1, \\ C_2 + C_3 = 1. \end{cases}$$

Решением системы являются числа  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ . Подставив значения констант в общее решение, получим частное решение:

$$y = 2 + e^{-x}.$$

## Домашнее задание

9.288, 289, 299, 301, 316, 318, 325, 326, 328, 330, 332, 334, 338.