Семинар 17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

где $a_i(x)$, $b(x) \neq 0$ — функции, непрерывные на некотором интервале I, называется *линейным неоднородным уравнением n-го порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения* утверждает, что общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}},$$

где $y_{\text{он}}$ — общее решение линейного неоднородного уравнения, $y_{\text{оо}}$ — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, $y_{\text{чн}}$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения. Напомним теорему *о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка.* Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — некоторая ФСР ЛОДУ n-го порядка, то общее решение имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_{\text{чн}}.$$

Значит, для записи общего решения неоднородного уравнения достаточно найти всего одно частное решение этого уравнения, а далее воспользоваться этой теоремой.

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Пусть известны корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

с учетом их кратностей.

Вид частного решения такого неоднородного уравнения зависит от вида правой части. Если правая часть имеет так называемый *специальный вид*, то есть задана в виде *квазимногочлена*, то вид частного решения можно определить без интегрирования. *Квазимногочленом* называется функция вида

$$b(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x).$$

Вид частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения в зависимости от вида правой части $b(x)$ неоднородного уравнения определяется следующим образом:

1) Пусть правая часть имеет вид

$$b(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ — некоторый многочлен n-ой степени.

- а) если α — не корень характеристического уравнения, то

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

- б) если α — корень характеристического уравнения кратности r, то

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ — многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами.
2) Пусть правая часть имеет вид

$$b(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x), T_m(x)$ — некоторые многочлены степеней n и m соответственно.

- а) если $\alpha \pm \beta i$ — не корни характеристического уравнения, то

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x), \quad N = \max\{n, m\},$$

- б) если $\alpha \pm \beta i$ — корни характеристического уравнения кратности r каждый, то

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x), \quad N = \max\{n, m\},$$

где $Q_N(x)$, $S_N(x)$ — многочлены N-ой степени с неопределенными коэффициентами.

Если правая часть линейного неоднородного уравнения имеет вид $b_1(x) + b_2(x)$, где $b_1(x)$, $b_2(x)$ — квазимногочлены, то для определения частного решения можно применить *принцип наложения решений*: если y_1 — решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x),$$

а y_2 — решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_2(x),$$

то $y_1 + y_2$ — решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x) + b_2(x).$$

Хочется заметить, что эти правила только устанавливают вид частного решения. Чтобы найти неопределенные коэффициенты в этих многочленах, нужно применить метод неопределенных коэффициентов.

В следующих задачах установить вид общего решения неоднородного уравнения (без вычисления коэффициентов).

Задача 9.346. $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$.

Решение: Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$

Уравнение имеет единственный корень кратности 2:

$$\lambda_{1,2} = 4.$$

Таким образом, ФСР однородного уравнения образуют функции

$$y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = xe^{4x},$$

а общее решение по теореме о структуре общего решения линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Теперь рассмотрим правую часть линейного неоднородного уравнения

$$b(x) = (1-x)e^{4x}.$$

Правая часть имеет вид квазимногочлена, поэтому вид частного решения неоднородного уравнения можно определить без интегрирования. В данном случае

$$\alpha = 4, \quad n = 1, \quad r = 2,$$

где α — коэффициент перед x в показателе экспоненты e^{4x} и это число является корнем характеристического уравнения кратности 2, n — степень многочлена $P_n(x) = 1 - x$, $r = 2$ — кратность корня $\alpha = 4$ (см. текст в рамке, случай 1б). В этом случае частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

или для заданных значений α, r и n:

$$y_{\text{чн}} = x^2(Ax + B)e^{4x}.$$

Таким образом, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + x^2(Ax + B)e^{4x}.$$

Задача 9.349. $y^{IV}+4y''+4y=x\sin 2x$.

Решение: Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y^{IV}+4y''+4y=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4+4\lambda^2+4=0 \quad \text{или} \quad (\lambda^2+2)^2=0.$$

Уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней кратности 2 каждый:

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{2}i, \quad \lambda_{3,4}=-\sqrt{2}i.$$

Таким образом, ФСР однородного уравнения образуют функции

$$y_1=\cos\sqrt{2}x, \quad y_2=\sin\sqrt{2}x, \quad y_3=x\cos\sqrt{2}x, \quad y_4=x\sin\sqrt{2}x$$

а общее решение по теореме о структуре общего решения линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}}=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+C_3x\cos\sqrt{2}x+C_4x\sin\sqrt{2}x.$$

Теперь рассмотрим правую часть линейного неоднородного уравнения

$$b(x)=x\sin 2x.$$

Правая часть имеет вид квазимногочлена, поэтому вид частного решения неоднородного уравнения можно определить без интегрирования. В данном случае

$$\alpha\pm\beta i=0\pm 2i, \quad n=0, \quad m=1,$$

где $\alpha=0$ — коэффициент перед x в показателе экспоненты $1=e^{0\cdot x}$, $\beta=2$ — коэффициент перед x в функции $\sin 2x$, причем числа $\alpha\pm betai=0\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, n — степень многочлена $P_n(x)=0$, m — степень многочлена $T_m(x)=x$. (см. текст в рамке, случай 2а). В этом случае $N=\max\{0,1\}=1$, а частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}}=e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x+S_N(x)\sin\beta x),$$

или для заданных значений α, β и N:

$$y_{\text{чн}}=(Ax+B)\cos 2x+(Dx+E)\sin 2x.$$

Таким образом, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}}=(C_1+C_3x)\cos\sqrt{2}x+(C_2+C_4x)\sin\sqrt{2}x+(Ax+B)\cos 2x+(Dx+E)\sin 2x.$$

Задача 9.352. $y''+2y'+5y=e^x\big((x+1)\cos 2x+3\sin 2x\big)$.

Решение: Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Таким образом, ФСР однородного уравнения образуют функции

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x,$$

а общее решение по теореме о структуре общего решения линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{oo}} = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x.$$

Теперь рассмотрим правую часть линейного неоднородного уравнения

$$b(x) = e^x\big((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x\big).$$

Правая часть имеет вид квазимногочлена, поэтому вид частного решения неоднородного уравнения можно определить без интегрирования. В данном случае

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad n = 1, \quad m = 0,$$

где α — коэффициент перед x в показателе экспоненты e^x, $\beta = 2$ — коэффициент перед x в функции $\sin 2x$ или $\cos 2x$, причем числа $1 \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, n — степень многочлена $P_n(x) = x + 1$, m — степень многочлена $T_m(x) = 3$. (см. текст в рамке, случай 2a). В этом случае $N = \max\{1, 0\} = 1$, а частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x),$$

или для заданных значений α, r и n:

$$y_{\text{чн}} = e^x((Ax + B)\cos 2x + (Dx + E)\sin 2x).$$

Таким образом, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x + e^x((Ax + B)\cos 2x + (Dx + E)\sin 2x).$$

Задача 1*. $y^{IV} - y''' - 3y'' + y' + 2y = e^x\cos 2x + (x^3 - 1)e^{-x} + 4xe^{2x} + \sin x - x\cos x.$

Решение: Подобная задача есть в домашнем задании (задача 5) и в РК2 (задача 4).

Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y^{IV} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Первый корень уравнения находится подбором: $\lambda_1 = 1$. В результате деления характеристического многочлена на $\lambda - 1$ получаем

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda - 2).$$

Подбором можно найти и второй корень характеристиеского многочлена: $\lambda_2 = -1$. В результате деления $(\lambda^3 - 3\lambda - 2)$ на $\lambda + 1$ получаем

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

Квадратное уравнение $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ имеет два корня: $\lambda_3 = -1$ и $\lambda_4 = 2$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет три действительных корня:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1, \quad \lambda_4 = 2.$$

ФСР однородного уравнения образуют функции

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = xe^{-x}, \quad y_4 = e^{2x}.$$

а общее решение по теореме о структуре общего решения линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{oo}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 e^{2x}.$$

Теперь рассмотрим правую часть линейного неоднородного уравнения

$$b(x) = e^x \cos 2x + (x^3 - 1)e^{-x} + 4xe^{2x} + \sin x - x\cos x.$$

Правая часть имеет вид суммы нескольких квазимногочленов. Найдем функцию $y_{\text{чн}i}$, соответствующую каждому слагаемому функции $b(x)$, после чего применим принцип наложения решений. Представим правую часть уравнения в виде

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + b_3(x) + b_4(x),$$

где

$$b_1(x) = e^x \cos 2x, \quad b_2(x) = (x^3 - 1)e^{-x}, \quad b_3(x) = 4xe^{2x}, \quad b_4(x) = \sin x - x\cos x,$$

и рассмотрим каждую из функций $b_i(x)$ отдельно.

- $b_1(x) = e^x \cos 2x$

  В этом случае $\alpha = 1$, $\beta = 2$, и числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения. Значит, реализуется случай 2а (см. текст в рамке), и часть частного решения, соответствующая этой функции, имеет вид

  $$y_{\text{чн}1} = e^x(A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x).$$

- $b_1(x) = (x^3 - 1)e^{-x}$

  В этом случае $\alpha = -1$, и число $\alpha = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Значит, реализуется случай 1б (см. текст в рамке), и часть частного решения, соответствующая этой функции, имеет вид
  $$y_{\text{чн}2} = x^2 e^{-x}(A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x + E_2).$$

- $b_3(x) = 4xe^{2x}$

  В этом случае $\alpha = 2$, и число $\alpha = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Значит, реализуется случай 1б (см. текст в рамке), и часть частного решения, соответствующая этой функции, имеет вид
  $$y_{\text{чн}3} = xe^{2x}(A_3 x + B_3).$$

- $b_4(x) = \sin x - x\cos x$

  В этом случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$, и числа $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Значит, реализуется случай 2а (см. текст в рамке), и часть частного решения, соответствующая этой функции, имеет вид
  $$y_{\text{чн}4} = (A_4 x + B_4)\cos x + (D_4 x + E_4)\sin x$$

По принципу наложения решений частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{чн}1} + y_{\text{чн}2} + y_{\text{чн}3} + y_{\text{чн}4} = e^x(A_1\cos 2x + B_1 \sin 2x) + x^2 e^{-x}(A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x + E_2) +$$
$$+ xe^{2x}(A_3 x + B_3) + (A_4 x + B_4)\cos x + (D_4 x + E_4)\sin x$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x + C_4 e^{2x} +$$
$$+ e^x(A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x) + x^2 e^{-x}(A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x + E_2) +$$
$$+ xe^{2x}(A_3 x + B_3) + (A_4 x + B_4)\cos x + (D_4 x + E_4)\sin x$$

В следующих задачах нужно не только выписать вид общего решения, но и найти его.

Задача 9.354. $y'' - y = e^{-x}$.

Решение: Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Значит, ФСР уравнения образуют функции

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x},$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения:

$$b(x) = e^{-x}.$$

Здесь $\alpha = -1$, и это число является корнем характеристического уравнения кратности 1, то есть реализуется случай 1б, и частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = Axe^{-x}.$$

Найдем коэффициент A. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = Axe^{-x},$$

тогда

$$y' = Ae^{-x} - Axe^{-x}, \quad y'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x}.$$

Подставим функцию y и ее производную в исходное ДУ:

$$y'' - y = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}.$$

Сократив в последнем уравнении все, что можно, получаем уравнение для определения A:

$$-2A = 1,$$

откуда $A = -\frac{1}{2}$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = -\frac{x}{2} e^{-x},$$

а общее решение этого уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{x}{2} e^{-x}.$$

Задача 9.357. $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$.

Решение: Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Значит, ФСР уравнения образуют функции

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x},$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения:

$$b(x) = 13 \sin 3x.$$

Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 3$, и числа $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, то есть реализуется случай 2а, и частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Найдем коэффициенты A, B. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = A \cos 3x + B \sin 3x,$$

тогда

$$y' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \quad y'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Подставим функцию y и ее производные в исходное ДУ:

$$y'' - 5y' + 6y = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 5\big(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x\big) + 6\big(A \cos 3x + B \sin 3x\big) =$$

$$= \cos 3x(-3A - 15B) + \sin 3x(-3B + 15A) = 13 \sin 3x$$

Приравняв в последнем уравнении коэффициенты перед одинаковыми функциями, получаем систему линейных уравнений

$$\cos 3x\colon \quad -3A - 15B = 0,$$

$$\sin 3x\colon \quad -3B + 15A = 13,$$

откуда получаем

$$A = \frac{5}{6}, \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \frac{5}{6} \cos 3x - \frac{1}{6} \sin 3x,$$

а общее решение этого уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6} \cos 3x - \frac{1}{6} \sin 3x.$$

Задача 9.360. $y'' + y = 4x \cos x$.
Решение: Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Значит, ФСР уравнения образуют функции

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x,$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения:

$$b(x) = 4x \cos x.$$

Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$, и числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1, то есть реализуется случай 2б, и частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x\big((Ax + B)\cos x + (Dx + E)\sin x\big).$$

Найдем коэффициенты A, B, D, E. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = x\big((Ax + B)\cos x + (Dx + E)\sin x\big),$$

тогда

$$y' = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Dx + E)\sin x + (Dx^2 + Ex)\cos x$$

$$y'' = 2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x - (Ax^2 + Bx)\cos x +$$
$$+ 2D\sin x + 2(2Dx + E)\cos x - (Dx^2 + Ex)\sin x.$$

Подставим функцию y и ее производные в исходное ДУ:

$$y'' + y = 2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x - (Ax^2 + Bx)\cos x +$$

$$+ 2D\sin x + 2(2Dx + E)\cos x - (Dx^2 + Ex)\sin x +$$
$$+ (Ax^2 + Bx)\cos x + (Dx^2 + Ex)\sin x =$$
$$= 2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x + 2D\sin x + 2(2Dx + E)\cos x = 4x\cos x$$

Приравняв в последнем уравнении коэффициенты перед одинаковыми функциями, получаем систему линейных уравнений

$$x\cos x\colon \quad 4D = 4,$$

$$x\sin x\colon \quad -4A = 0,$$

$$\cos x\colon \quad 2A + 2E = 0,$$

$$\sin x: \quad -2B + 2D = 0,$$

откуда получаем

$$A = 0, \quad B = 1, \quad D = 1, \quad E = 0.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x\big(\cos x + x\sin x\big),$$

а общее решение этого уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\big(\cos x + x\sin x\big).$$

В следующих задачах нужно найти решение задач Коши.

Задача 9.371. $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Решение: Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y''' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Значит, ФСР уравнения образуют функции

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-x},$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}.$$

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения:

$$b(x) = -2x.$$

Здесь $\alpha = 0$, и это число является корнем характеристического уравнения кратности 1, то есть реализуется случай 1б, и частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x(Ax + B).$$

Найдем коэффициенты A, B. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx,$$

тогда

$$y' = 2Ax + B, \quad y'' = 2A, \quad y''' = 0.$$

Подставим функцию y и ее производные в исходное ДУ:

$$y''' - y' = 0 - 2Ax - B = -2x$$

Приравняв в последнем уравнении коэффициенты перед одинаковыми степенями x, получаем систему линейных уравнений

$$x\colon \quad -2A = -2,$$

$$1\colon \quad -B = 0,$$

откуда получаем

$$A = 1, \quad B = 0.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x^2,$$

а общее решение этого уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + x^2.$$

Теперь найдем решение задачи Коши с начальными условиями:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2.$$

Продифференцируем $y_{\text{он}}$ два раза, получим:

$$y'_{\text{он}} = C_2 e^x - C_3 e^{-x} + 2x, \quad y''_{\text{он}} = C_2 e^x + C_3 e^{-x} + 2.$$

Подставив $x = 0$, $y = 0$, $y' = 2$, $y'' = 2$ в выражения для общего решения, получаем систему уравнений для определения констант C_1, C_2, C_3:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 - C_3 = 2,$$

$$y''(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 + C_3 + 2 = 2,$$

откуда

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -1.$$

Следовательно, частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y(x) = e^x - e^{-x} + x^2.$$

Задача 2*. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} + 8x + 12$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Решение: Подобная задача есть в домашнем задании (задача 4).

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Уравнение имеет единственный корень кратности 2

$$\lambda_{1,2} = -2.$$

Значит, ФСР уравнения образуют функции

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x},$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения:

$$b(x) = 2e^{-2x} + 8x + 12.$$

Пусть $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, где

$$b_1(x) = 2e^{-2x}, \quad b_2(x) = 8x + 12.$$

- $b_1(x) = 2e^{-2x}$.

  Тогда $\alpha = -2$, и это число является корнем характеристического уравнения кратности 2. Таким образом,

$$y_{\text{чн}1} = Ax^2 e^{-2x}.$$

- $b_1(x) = 8x + 12$.

  Тогда $\alpha = 0$, и это число не является корнем характеристического уравнения. Таким образом,

$$y_{\text{чн}2} = Bx + D.$$

Значит, по принципу наложения решений частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = Ax^2 e^{-2x} + Bx + D.$$

Найдем коэффициенты A, B, D. Пусть решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = Ax^2 e^{-2x} + Bx + D,$$

тогда

$$y' = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2 e^{-2x} + B, \quad y'' = 2Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 4Ax^2 e^{-2x}.$$

Подставим функцию y и ее производные в исходное ДУ:

$$y'' + 4y' + 4y = 2Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 4Ax^2 e^{-2x} +$$

$$+4\big(2Axe^{-2x} - 2Ax^2 e^{-2x} + B\big) + 4\big(Ax^2 e^{-2x} + Bx + D\big)$$

Заметим, что в полученном уравнении сокращаются слагаемые перед xe^{-2x} и $x^2 e^{-2x}$. В результате получаем

$$2Ae^{-2x} + 4B + 4Bx + 4D = 2e^{-2x} + 8x + 12.$$

Приравняв в последнем уравнении коэффициенты перед одинаковыми функциями, получаем систему линейных уравнений

$$e^{-2x}: \quad 2A = 2,$$

$$x: \quad 4B = 8,$$

$$1: \quad 4B + 4D = 12.$$

откуда получаем

$$A = 1, \quad B = 2, \quad D = 1.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x^2 e^{-2x} + 2x + 1,$$

а общее решение этого уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} + 2x + 1.$$

Теперь найдем решение задачи Коши с начальными условиями:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Продифференцируем $y_{\text{он}}$, получим:

$$y'_{\text{он}} = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} + 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} + 2.$$

Подставив $x = 0$, $y = 2$, $y' = -1$ в выражения для общего решения, получаем систему уравнений для определения констант C_1, C_2:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 1 = 2,$$

$$y'(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -2C_1 + C_2 + 2 = -1,$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Следовательно, частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y(x) = e^{-2x} - x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} + 2x + 1.$$

Домашнее задание

9.347, 349, 350, 355, 361, 362, 370, 372.