Семинар 18. Формула Остроградского-Лиувилля.

Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

§1. Метод вариации произвольных постоянных

Пусть дано линейное неоднородное уравнение n-го пор:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Пусть для этого уравнения известно решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n, \quad y_1, \ldots, y_n - \text{ФСР}$$

Тогда решение неоднородного уравнения можно искать в виде:

$$y_{сн} = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n,$$

где функции $C_i'(x)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = b(x), \end{cases}$$

В правой части везде нули, кроме последней строки.

а сами $C_i(x)$ находятся потом интегрированием $C_i'(x)$

Этот метод можно применять всегда, когда удается найти общее решение однородного уравнения. Однако если уравнение имеет постоянные коэффициенты, а правая часть задана в виде квазимногочлена, все-таки лучше применять метод, о котором я писала в семинаре 17. Если же этот метод неприменим, то можно использовать метод вариации произв. постоянных

9.342 Решить ДУ методом вариации произв. постоянных:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$

Решение: В этом уравнении правая часть не имеет вид квазимногочлена, а потому применить метод из семинара 17 не получится. Поэтому решим уравнение методом вариации произв. постоянных.

1) Сначала решим соответствующее однородное ур-е:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Характ. уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

корни: $\lambda_1 = -1; \; \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$; $\lambda_2 = -2 \Rightarrow y_2 = e^{-2x}$

ФСР

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

2) Запишем систему метода вариации. Там 2 уравнения, т.к. уравнение второго порядка:

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' e^{-2x} = 0 \\ C_1' \cdot (-e^{-x}) + C_2' \cdot (-2e^{-2x}) = \dfrac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

– как общее решение, но C_i' вместо C_i

– в последнем уравнении не забыть про правую часть

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \; C_1' e^{-x} + C_2' e^{-2x} = 0 \\ + \; -C_1' e^{-x} - 2C_2' e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x+1} \\ \hline -C_2' e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x+1} \Rightarrow \underbrace{C_2' = -\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}} \end{array}$$

$$\Rightarrow C_1' + C_2' e^{-x} = 0 \Rightarrow C_1' = -C_2' \cdot e^{-x}$$

$$\underbrace{C_1' = \frac{e^x}{e^x+1}}$$

Таким образом, нашли производные функций $C_i(x)$. Сами эти функции находятся интегрированием:

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln|e^x+1| + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{e^x \cdot e^x}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{e^x\,de^x}{e^x+1} = \left\{ \begin{array}{c} \text{замена:} \\ e^x = t \end{array} \right\} =$$

$$= -\int \frac{t}{t+1}\,dt = -\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = -\int dt + \int \frac{dt}{1+t} = -t + \ln|1+t| + \tilde{C}_2 =$$

$$= -e^x + \ln|e^x+1| + \tilde{C}_2$$

Подставим $C_1(x)$, $C_2(x)$ в общее решение: $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

$$y_{он} = (\underbrace{\ln|e^x+1| + \tilde{C}_1}_{C_1(x)}) \cdot e^{-x} + (\underbrace{-e^x + \ln|e^x+1| + \tilde{C}_2}_{C_2(x)}) \cdot e^{-2x} =$$

$$= e^{-x} \ln|e^x+1| + \tilde{C}_1 \cdot e^{-x} - e^{-x} + e^{-2x} \cdot \ln|e^x+1| + \tilde{C}_2 e^{-2x} =$$

$$= \underbrace{\tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 \cdot e^{-2x}}_{\text{общее решение однородного уравнения}} \; \underbrace{- e^{-x} + \ln|e^x+1| \cdot (e^{-x} + e^{-2x})}_{\text{частное решение неоднородного уравнения}} \Leftarrow$$ общее решение неодн. уравнения

9. 344 $\quad y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$

Решение: Решим уравнение методом вариации произвольных постоянных.

1) Сначала решим соответствующее одн. ур-е:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характер. уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$

Корни: $\lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^x$; $y_2 = xe^x$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2) общее решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{он} = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, x e^x$$

Система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 & \Big| : e^x \\ C_1' e^x + C_2' (e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} & \Big| : e^x \end{cases}$$

$$-\begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_1' + C_2'(x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \qquad \Rightarrow C_1' = -C_2' x$$

$$C_1' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$C_2' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Проинтегрируем $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$$C_1(x) = \int -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \sqrt{4-x^2} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + \tilde{C}_2$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = \left(\sqrt{4-x^2} + \tilde{C}_1\right) e^x + \left(\arcsin\frac{x}{2} + \tilde{C}_2\right) x e^x$$

Скобки можно и раскрыть, но я не буду.

§2. Нахождение общего решения ~~не~~ однородного уравнения по известному частному решению

Пусть дано уравнение второго порядка:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

И известно y_1 — его частное решение. Тогда другое частное решение y_2 может быть найдено по ф-ле:

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx}$$

– это следствие из формулы Остроградского-Лиувилля.

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$\boxed{y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

1*) Зная частное решение y_1 ЛОДУ, найти общее решение ЛНДУ:

$$x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}; \quad y_1 = x$$

Решение: Поступим следующим образом:

1) Найдем решение однородного уравнения, используя формулу-следствие из формулы Остроградского-Лиувилля.

2) Применим метод вариации произвольных постоянных, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения.

① Чтобы применить эту формулу, поделим на коэф-т перед y'' (в формуле предполагается, что коэф-т перед y'' равен 1):

$$y'' + \underbrace{\frac{y'}{x(1-\ln x)}}_{a_1(x)} - \frac{y}{x^2(1-\ln x)} = \frac{(1-\ln x)}{x^3}$$

Найдем y_2:

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = x\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}}}{x^2}\,dx =$$

$$= x\int\frac{e^{-\int\frac{d\ln x}{1-\ln x}}}{x^2}\,dx = x\int\frac{e^{\int\frac{d(1-\ln x)}{(1-\ln x)}}}{x^2}\,dx = x\int\frac{e^{\ln|1-\ln x|}}{x^2}\,dx =$$

$$= x\int\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx = -x\int(1-\ln x)\,d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x\left(-\frac{1-\ln x}{x} + \int\frac{1}{x}\,d(1-\ln x)\right) = x\left(\frac{\ln x-1}{x} - \int\frac{dx}{x^2}\right) = x\left(\frac{\ln x-1}{x} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x\cdot\frac{\ln x}{x} = \underline{\ln x}$$

Кстати, в этой формуле достаточно найти ещё одно частное решение уравнения, а потому после интегрирования можно не писать константу.

Значит, общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo} = C_1 x + C_2 \ln x$$

② Чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, применим метод вариации произвольных постоянных.

Ищем решение в виде:

$$y_{он} = C_1(x)x + C_2(x)\ln x$$

Тогда система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1' x + C_2' \ln x = 0 \\ C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot \frac{1}{x} = \frac{(1-\ln x)}{x^3} \quad / \cdot x \end{cases}$$

$$- \begin{matrix} C_1' x + C_2' \ln x = 0 \\ C_1' x + C_2' = \frac{(1-\ln x)}{x^2} \end{matrix} \qquad \Rightarrow C_1' = -C_2' \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$C_2'(1-\ln x) = \frac{(1-\ln x)}{x^2} \qquad \Downarrow$$

$$C_1' = -\frac{\ln x}{x^3}$$

$$C_2' = \frac{1}{x^2}$$

Проинтегрируем теперь $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$C_1 = -\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int \ln x \, d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2} d(\ln x) =$$

$$= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_2$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1\right)x + \left(-\frac{1}{x} + \tilde{C}_2\right)\ln x =$$

$$= \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{4x} + \tilde{C}_1 x - \frac{\ln x}{x} + \tilde{C}_2 \ln x = \underbrace{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \ln x}_{y_{оо}} + \underbrace{\frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{2x}}_{y_{чн}}$$

(2*) Зная частное решение y_1 однородного уравнения, найти общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - y' + e^{2x}y = e^{3x} \quad ; \ y_1 = \cos e^x$$

Решение: Как и в прошлой задаче, сначала найдем общее решение однородного уравнения, используя формулу-следствие из формулы Остроградского-Лиувилля:

1) $$y_2 = \cos e^x \int \frac{e^{-\int(-1)dx}}{\cos^2 e^x}dx = \cos e^x \int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}dx =$$

$$= \cos e^x \int \frac{de^x}{\cos^2 e^x} = \cos e^x \cdot \operatorname{tg} e^x = \sin e^x$$ – другое частное решение

общее решение однородного уравнения:

$$y_{оо} = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x$$

2) Чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, применим метод вариации.

Ищем решение в виде:

$$y_{он} = C_1(x)\cos e^x + C_2(x)\sin e^x$$

Система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1'\cos e^x + C_2'\sin e^x = 0 \\ -e^x C_1'\sin e^x + e^x C_2'\cos e^x = e^{3x} \quad \Big| : e^x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C_1'\cos e^x + C_2'\sin e^x = 0 \quad \Big| \cdot \sin e^x \\ -C_1'\sin e^x + C_2'\cos e^x = e^{2x} \quad \Big| \cdot \cos e^x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$+\begin{array}{l} C_1'\cancel{\cos e^x \sin e^x} + C_2'\sin^2 e^x = 0 \\ -C_1'\cancel{\sin e^x \cos e^x} + C_2'\cos^2 e^x = e^{2x}\cos e^x \end{array}$$

$$\underline{C_2' = e^{2x}\cos e^x}$$

$$\begin{cases} C_1'\cos e^x + C_2'\sin e^x = 0 \quad \Big| \cdot \cos e^x \\ -C_1'\sin e^x + C_2'\cos e^x = e^{2x} \quad \Big| \cdot \sin e^x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-\begin{array}{l} C_1'\cos^2 e^x + C_2'\cancel{\sin e^x \cos e^x} = 0 \\ -C_1'\sin^2 e^x + C_2'\cancel{\cos e^x \sin e^x} = e^{2x}\sin e^x \end{array}$$

$$\underline{C_1' = -e^{2x}\sin e^x}$$

Найдем $C_1(x)$; $C_2(x)$:

$$C_1 = -\int e^{2x}\sin e^x\,dx = -\int e^x \sin e^x\,de^x = \{e^x = t\} = -\int t\sin t\,dt =$$

$$= \int t\,d\cos t = t\cos t - \int \cos t\,dt = t\cos t - \sin t + \tilde{C}_1 =$$

$$= e^x\cos e^x - \sin e^x + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int e^{2x}\cos e^x\,dx = \int e^x\cos e^x\,de^x = \{e^x = t\} = \int t\cos t\,dt =$$

$$= \int t\,d\sin t = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t + \tilde{C}_2 =$$

$$= e^x\sin e^x + \cos e^x + \tilde{C}_2$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = (e^x\cos e^x - \sin e^x + \tilde{C}_1)\cos e^x + (e^x\sin e^x + \cos e^x + \tilde{C}_2)\sin e^x =$$

$$= \underline{e^x\cos^2 e^x} - \cancel{\sin e^x \cos e^x} + \tilde{C}_1\cos e^x + \underline{e^x\sin^2 e^x} + \cancel{\sin e^x\cos e^x} + \tilde{C}_2\sin e^x =$$

$$= \underbrace{\tilde{C}_1\cos e^x + \tilde{C}_2\sin e^x}_{y_{оо}} + \underbrace{e^x}_{y_{чн}}$$

Д/З Готовиться к РК2, делать ДЗ2.