Семинар 1. Аксиомы линейного пространства. Матрица перехода

§1. Понятие линейного пространства

Множество $\mathcal{L}$ называется *линейным пространством* над полем $\mathbb{K}$, если

1. Задана операция сложения элементов $\mathcal{L}$, то есть закон, который паре элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, который называется *суммой* элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначается $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

2. Задана операция умножения элемента $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ на элемент поля $\lambda \in \mathbb{K}$, то есть элементам $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, который называется *произведением* элемента $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ на $\lambda \in \mathbb{K}$ и обозначается $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x}$.

3. Заданные операции подчиняются аксиомам линейного пространства:

   1°. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ (коммутативность сложения),

   2°. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$ (ассоциативность сложения),

   3°. Существует элемент $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$, такой, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ (существования нуля),

   4°. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ существует $-\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ (существование противоположного элемента),

   5°. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

   6°. $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (ассоциативность умножения на число),

   7°. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (дистрибутивность сложения элементов поля относительно умножения),

   8°. $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (дистрибутивность сложения элементов линейного пространства относительно умножения на число).

Элементы линейного пространства часто называют векторами, а само линейное пространство — векторным пространством. Типичными примерами линейных пространств являются:

1. Множество свободных геометрических векторов V_3 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел,

2. Множество многочленов степени $\leq n$ над $\mathbb{R}$,

3. Множество всех матриц размера $m \times n$ над $\mathbb{R}$,

4. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.

Задача 1. Проверить аксиомы линейного пространства для этих множеств.

Задача 2. Выяснить, являются ли линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$ следующие множества:

- Множество всех решений однородной СЛАУ (Да).

- Множество всех векторов с концами на фиксированной прямой (Нет).

- Множество всех сходящихся последовательностей (Да).

- Множество всех решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0.$$

(Да.)

- Множество всех комплексных чисел (Да).

§2. Базис линейного пространства

Система векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие элементы поля $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, что линейная комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$ обращается в ноль. В противном случае (если только тривиальная линейная комбинация равна нулю) система векторов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{L}$ называется линейно независимой. Максимальная линейно независимая система векторов в $\mathcal{L}$ называется *базисом* пространства, а количество векторов в такой системе — *размерностью* пространства. В приводимых ранее примерах линейных пространств базисами являются, например, следующие системы:

1. Во множестве V_3 базис могут образовывать любые три некомпланарных вектора. Размерность пространства равна 3.

2. Для многочленов степени $\leq n$ с коэффициентами в поле действительных чисел (такое линейное пространство обозначается $\mathbb{R}_n[t]$) стандартным базисом являются одночлены 1, t, t^2, ..., t^n. Размерность пространства $\mathbb{R}_n[t]$ равна $n + 1$.

3. В линейном пространстве матриц базис образуют матрицы

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots$$

   Размерность пространства равна $n \cdot m$.

4. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартным базисом являются векторы $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots$. Размерность пространства равна n.

Задача 3. Проверить, образует ли линейное пространство над $\mathbb{R}$ множество всех квадратных матриц порядка n, у которых след[1] равен нулю.

Решение: Это множество действительно образует линейное пространство, поскольку выполнение всех аксиом следует из того, что рассматриваемое множество является подмножеством линейного пространства всех матриц, а замкнутость достаточно очевидна: сумма матриц с нулевым следом является матрицей с нулевым следом. Базис образуют все матрицы вида E_{ij}, где $i \neq j \leq n$, а также матрицы $E_{kk} - E_{nn}$, $k < n$. Элемент a_{nn} матрицы с нулевым следом не может принимать произвольные значения, он должен быть равен

$$a_{nn} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{kk}.$$

[1] Следом матрицы называется сумма элементов главной диагонали.

Значит, размерность этого пространства равна $n^2 - 1$.

Задача 4. Проверить, образуют ли базис в V_3 векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для проверки линейной независимости векторов достаточно убедиться, что определитель, составленный из координат векторов, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Задача 5. Убедиться, что система многочленов $\{t^2 - 3t + 1, t + 2, 1\}$ образует базис в пространстве $\mathbb{R}_2[x]$.

Решение: Сначала запишем координаты этих многочленов по базису $\{t^2, t, 1\}$:

$$t^2 - 3t + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t + 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После чего проверим линейную независимость полученных векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Задача 6. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, состоящем из q элементов. Найти число базисов в пространстве V.

Решение: Система векторов образует базис, если матрица, составленная из координат этих векторов в некотором стандартном базисе, невырождена. Поэтому задачу можно переформулировать следующим образом: найти число невырожденных квадратных матриц над конечным полем с числом элементов q. Множество таких матриц образует общую линейную группу $GL_n(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$, а число таких матриц равно порядку этой группы. Эту задачу мы решали в прошлом семестре: число возможных первых строк такой матрицы равно

$$p_1 = q^n - 1,$$

поскольку первая строка не должна быть полностью нулевой. Аналогично, число возможных вторых строк равно

$$p_2 = q^n - q,$$

поскольку вторая строка не должна быть линейно зависима с первой. Продолжая процесс рассуждений таким образом, получим, что число возможных последних строк невырожденной матрицы равно

$$p_n = q^n - q^{n-1},$$

откуда получим, что число невырожденных матриц над конечным полем равно

$$|GL_n(\mathbb{K})| = \prod_{k=0}^{n-1} q^n - q^k.$$

§3. Матрица перехода

Пусть дано n-мерное линейное пространство $\mathcal{L}$, пусть $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ — два базиса в $\mathcal{L}$. В *матрице перехода* $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ от базиса $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ к базису $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ по столбцам записаны координаты нового базиса ($\boldsymbol{b}$) в старом ($\boldsymbol{a}$). Перечислим основные свойства матрицы перехода:

1°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}} = E$.

2°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \big(T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}\big)^{-1}$,

3°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}$.

Если задана матрица перехода $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$, то при замене базиса координаты вектора $\boldsymbol{x}$ пересчитываются по формуле

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}.$$

Задача 7. Пусть $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, $B' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ — прямоугольные базисы в V_3. Найти матрицу перехода $T_{B\to B'}$ и выписать столбец координат вектора $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ в базисе B', если B' получен перестановкой

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{i}.$$

Решение: Для записи матрицы перехода нужно записать координаты векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ в базисе B. Таким образом, матрица перехода равна

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения $[\boldsymbol{x}]_{B'}$ используем формулу

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = T_{B'\to B}[\boldsymbol{x}]_B = \big(T_{B\to B'}\big)^{-1}[\boldsymbol{x}]_B.$$

Обратная к матрице перехода матрица равна

$$T_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = T_{B'\to B}[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Матрицу перехода можно не обращать, если рассматривать соотношение $[\boldsymbol{x}]_B = T_{B\to B'}[\boldsymbol{x}]_{B'}$ как СЛАУ с матрицей $T_{B\to B'}$ и вектором правой части $[\boldsymbol{x}]_B$. Тогда решение системы методом Гаусса дает

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \mathrm{III} \\ \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Задача 8. Найти координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе $\{(t-1)^2, (t-1), 1\}$.

Решение: Конечно, эту задачу можно решить и без помощи методов линейной алгебры. Однако цель параграфа не в решении непосредственно этой задачи, а в изучении матрицы перехода. Поэтому рассмотрим два базиса в пространстве $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов второго порядка:

$$B = \{t^2, t, 1\}, \quad B' = \{(t-1)^2, (t-1), 1\}.$$

Для того, чтобы получить матрицу перехода $T_{B\to B'}$, запишем координаты многочленов базиса B' в базисе B:

$$(t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t - 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что означает, что

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$T_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе B:

$$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Таким образом,

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = T_{B'\to B}[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

то есть

$$t^2 - t + 2 = (t-1)^2 + (t-1) + 2.$$

Замечание. Для сравнения предложим метод решения задачи, основанный на формуле Тейлора. Пусть

$$f(t) = t^2 - t + 2, \quad t_0 = 1.$$

Тогда

$$f(t_0) = f(1) = 2,$$
$$f'(t) = 2t - 1, \quad f'(t_0) = f'(1) = 1,$$
$$f''(t) = 2, \quad f''(t_0) = 2.$$

Третья и все последующие производные функции $f(t)$ равны нулю, что означает, что в формуле Тейлора есть только три ненулевых слагаемых, а остаточный член равен нулю. Применение формулы Тейлора дает

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 = 2 + \frac{1}{1!}(t-1) + \frac{2}{2!}(t-1)^2 = 2 + (t-1) + (t-1)^2.$$

Задача 9. В произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе B. Доказать, что $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — базис в $\mathcal{L}$ и найти столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, где

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для доказательства того, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют базис в $\mathcal{L}$, нужно показать, что матрица перехода к такому базису невырождена:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Для того, чтобы найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, рассмотрим соотношение $[\boldsymbol{x}]_B = T_{B\to B'}[\boldsymbol{x}]_{B'}$ как СЛАУ с матрицей $T_{B\to B'}$ и вектором правой части $[\boldsymbol{x}]_B$. Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to \mathrm{III} \\ \to \mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -2\cdot\mathrm{II} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

то есть

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, образует ли линейное пространство над $\mathbb{R}$ множество всех квадратных симметрических матриц порядка n с операцией сложения и умножения на действительное число. Если да, найти базис и размерность такого линейного пространства.

$\big($Ответ: да. Базис $E_{ij}+E_{ji}$, где $i \leq j \leq n$, размерность $\dfrac{n(n+1)}{2}$.$\big)$

Задача 2. Проверить, образует ли линейное пространство над $\mathbb{R}$ множество всех квадратных кососимметрических матриц порядка n с операцией сложения и умножения на действительное число. Если да, найти базис и размерность такого линейного пространства.

$\big($Ответ: да. Базис $E_{ij}-E_{ji}$, где $i < j \leq n$, размерность $\dfrac{n(n-1)}{2}$.$\big)$

Задача 3. Найти базис и размерность линейного пространства $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

$\big($Ответ: базис 1, i, размерность 2.$\big)$

Задача 4. В произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе B. Доказать, что $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ — базис в $\mathcal{L}$ и найти столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, где

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\big($Ответ: $[\boldsymbol{x}]_E = (0, 2, 1, 2)^T$.$\big)$

Задача 5. В линейном пространстве $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов степени ≤ 3 найти матрицу перехода от базиса $B = \{t^3, t^2, t, 1\}$ к базису $B' = \{(t-2)^3, (t-2)^2, t-2, 1\}$ и разложить многочлен $f(t) = t^3 - 8$ по степеням $t - 2$.

$\big($Ответ: $T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = (t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2)$.$\big)$

Задача 6. Доказать, что в $\mathbb{R}_n[x]$ система многочленов $\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ является базисом. Найти в этом базисе коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

$\big($Ответ: $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$.$\big)$