Семинар 2. Матрица перехода. Матрица поворота

§1. Матрица перехода

Начнем с нескольких задач, которые предполагают использование третьего свойства матриц перехода:
$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}.$$

Задача 1. В произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе $\boldsymbol{e}$. Доказать, что $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ и $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ — базисы в $\mathcal{L}$ и найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}$ к базису $\boldsymbol{b}$, где
$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}.$$
Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1,2,3)^T$.

Решение: Согласно третьему свойству матрицы перехода,
$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \big(T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}}\big)^{-1}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}},$$
где $\boldsymbol{e}$ — стандартный базис, в котором записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$. Обозначим:
$$A = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix},\quad B = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\1&1&-6\end{pmatrix}.$$
В этих матрицах координаты данных векторов записаны по столбцам. Для доказательства того, что векторы $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ образуют базисы в $\mathcal{L}$, нужно показать, что матрицы A и B невырождены (убедитесь в этом самостоятельно). Значит, для решения задачи нужно найти матрицу
$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B.$$
Напомню, что для нахождения такой матрицы достаточно воспользоваться цепочкой элементарных преобразований строк следующим образом:
$$\big(A|B\big) \sim \cdots \sim \big(E|A^{-1}B\big).$$
В данном случае получим:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&1&1&-6\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-2\cdot\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&-2&-4&-7\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\+\mathrm{II}\end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&0&-1&-7&-12&-8\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\cdot(-1)\\\cdot(-1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\0&1&-1&5&8&1\\0&0&1&7&12&8\end{array}\right)\begin{array}{c}-3\cdot\mathrm{III}\\+\mathrm{III}\\\\\end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-18&-31&-23\\0&1&0&12&20&9\\0&0&1&7&12&8\end{array}\right)\begin{array}{c}-2\cdot\mathrm{II}\\\\\\\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-42&-71&-41\\0&1&0&12&20&9\\0&0&1&7&12&8\end{array}\right).$$

Итак,

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{a}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{b}$) имеет координаты $(1, 2, 3)^T$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -307 \\ 79 \\ 55 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В линейном пространстве $\mathbb{Z}_5^3$ над полем вычетов $\mathbb{Z}_5$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе $\boldsymbol{e}$. Доказать, что $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ и $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ — базисы в $\mathbb{Z}_5^3$ и найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}$ к базису $\boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)^T$.

Решение: Обозначим:

$$A = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства того, что векторы $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ образуют базисы в $\mathbb{Z}_5^3$, нужно показать, что матрицы A и B невырождены (убедитесь в этом самостоятельно). Значит, для решения задачи нужно найти матрицу

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \big(T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}}\big)^{-1} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B.$$

Выполним цепочку преобразований над строками, выполняя операции в поле вычетов $\mathbb{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Итак,

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{a}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{b}$) имеет координаты $(1, 1, 1)^T$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Из последней выкладки видно, что

$$2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3.$$

Это можно использовать для проверки правильности решения задачи:

$$2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_3 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

§2. Матрица поворота

Если новый базис получен из старого поворотом вокруг некоторой оси на угол φ, то матрица перехода к такому базису называется *матрицей поворота*. Матрицы поворота вокруг базисных векторов в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол φ имеют вид

$$T_{\boldsymbol{i}}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}, \; T_{\boldsymbol{j}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}, \; T_{\boldsymbol{k}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Для поворота в отрицательном направлении (по часовой стрелке) достаточно подставить вместо φ отрицательный угол $-\varphi$. Матрица поворота является ортогональной матрицей, что значит

$$T^T = T^{-1}.$$

Задача 3. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на 90° в положительном направлении вокруг вектора $\boldsymbol{k}$, потом на 90° в отрицательном направлении вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{j}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(3, 4, 5)^T$.

Решение: Матрица $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$ перехода к базису $\boldsymbol{E}'$ равна

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = T_{\boldsymbol{k}}(90^\circ) = \begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично, матрица $T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''}$ перехода к базису $\boldsymbol{E}''$ равна

$$T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{j}}(-90^\circ) = \begin{pmatrix}\cos 90^\circ & 0 & -\sin 90^\circ\\ 0 & 1 & 0\\ \sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

По третьему свойству матриц перехода получаем

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{E}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{E}''$) имеет координаты $(3, 4, 5)^T$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

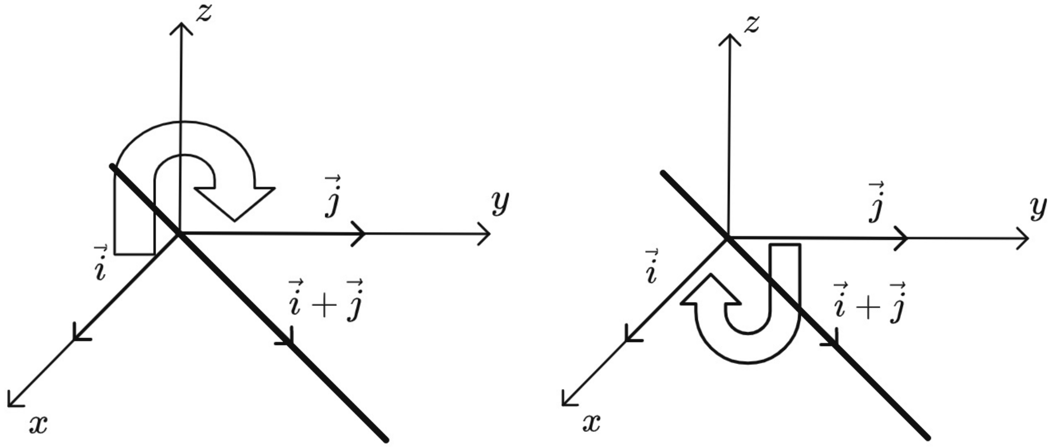
$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\3\end{pmatrix}.$$

А что, если нужно получить матрицу поворота вокруг произвольного вектора, а не одного из векторов стандартного прямоугольного базиса? Тогда использовать приведенные формулы нельзя, и приходится придумывать обходные маневры. Рассмотрим эти маневры на следующем примере.

Задача 4. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на $180°$ вокруг вектора $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$.

Решение: Для решения такой задачи рассмотрим 3 способа, в порядке увеличения сложности.

I способ. Поскольку в данном случае поворот происходит на „красивый“ угол, достаточно представить такой поворот геометрически. На следующих рисунках представлены повороты на угол $180°$ вокруг вектора $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ векторов $\boldsymbol{i}$ (слева) и $\boldsymbol{j}$ (справа).



Видно, что вектор $\boldsymbol{i}$ при таком повороте переходит в $\boldsymbol{j}$, а вектор $\boldsymbol{j}$ — в вектор $\boldsymbol{i}$, то есть $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{i}$. Кроме того, $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$. Следовательно, матрица перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$ равна

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II способ. Этот способ уместно использовать в том случае, если угол поворота не является таким красивым, но существует базис, в котором ось вращения совпадает с каким-нибудь координатным вектором. Для поиска искомой матрицы перехода можно перейти к базису, в котором ось вращения совпадает с некоторым координатным вектором, осуществить поворот там (с помощью матриц поворота вокруг координатных векторов), а потом вернуться в старый базис. В данном случае это можно сделать так:

1) Сначала поворачиваем базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ на $45°$ вокруг вектора $\boldsymbol{k}$, чтобы вектор вращения $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ совпал с осью $\boldsymbol{i}'$. Для этого воспользуемся формулой $T_{\boldsymbol{k}}(45°)$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Вращаем на $180°$ базис вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{i}$, подставляя $\varphi = 180°$ в формулу для $T_{\boldsymbol{i}}(\varphi)$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Для того, чтобы вернуться в базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, вычисляем обратную к матрице T_1, используя свойство ортогональности матрицы поворота:

$$T_3 = T_1^{-1} = T_1^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Таким образом, поворот базиса $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ на 180° вокруг вектора $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ выполняется с помощью матрицы

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = T_1 T_2 T_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

III способ. Этот способ можно использовать в самом общем случае. Для этого достаточно представить поворот в виде кватерниона, после этого вычислить, куда в результате такого вращения переходят базисные векторы. Записав координаты нового базиса в старом, получим матрицу перехода.

Напомню, что умножение кватернионов $q = t + \boldsymbol{u}$ и $p = s + \boldsymbol{v}$ происходит по формуле

$$q \cdot p = (ts - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + (t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).$$

Кватернион, соответствующий вращению на угол α относительно нормированного вектора $\boldsymbol{u}$, вычисляется по формуле

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u},$$

а обратный к нему —

$$q^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}.$$

При повороте, заданном кватернионом q, вектор $\boldsymbol{v}$ вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{v}' = q\boldsymbol{v}q^{-1}.$$

В нашем случае кватернион, задающий вращение на 180° вокруг вектора $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$ (это так нормируется вектор $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$), равен

$$q = \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}},$$

а обратный к нему —

$$q^{-1} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим, куда в результате поворота переходят базисные векторы.
1) Произведение кватернионов обладает ассоциативностью. Поэтому сначала вычислим $q \cdot \boldsymbol{i}$, а после этого — $q \cdot \boldsymbol{i} \cdot q^{-1}$:

$$q\boldsymbol{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k},$$

$$q\boldsymbol{i}q^{-1} = \frac{\boldsymbol{i}}{2} + \frac{\boldsymbol{j}}{2} + \left(-\frac{\boldsymbol{i}}{2} + \frac{\boldsymbol{j}}{2}\right) = \boldsymbol{j}.$$

2) Аналогично

$$q\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k},$$

$$qjq^{-1} = \frac{\boldsymbol{i}}{2} + \frac{\boldsymbol{j}}{2} + \left(\frac{\boldsymbol{i}}{2} - \frac{\boldsymbol{j}}{2}\right) = \boldsymbol{i}.$$

3) Аналогично

$$q\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},$$

$$q\boldsymbol{k}q^{-1} = -\boldsymbol{k}.$$

Записав координаты полученных векторов по столбцам, получим следующую матрицу

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на 180° вокруг вектора $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, потом на 90° в отрицательном направлении вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{j}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)^T$.

Решение: Для получения матрицы перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$ воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''}$ перехода к базису $\boldsymbol{E}''$ равна

$$T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{j}}(-90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & -\sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По третьему свойству матриц перехода получаем

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{E}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{E}''$) имеет координаты $(1, 1, 1)^T$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе $\boldsymbol{e}$. Доказать, что $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ и $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ — базисы в $\mathcal{L}$ и найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}$ к базису $\boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 2, 3)^T$.

$\left(\text{Ответ: } T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = (1, 4, 1)^T.\right)$

Задача 2. В линейном пространстве $\mathbb{Z}_5^3$ над полем вычетов $\mathbb{Z}_5$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ заданы своими координатами в некотором произвольном базисе $\boldsymbol{e}$. Доказать, что $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ и $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ — базисы в $\mathbb{Z}_5^3$ и найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}$ к базису $\boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)^T$.

$\left(\text{Ответ: } T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = (2, 3, 2)^T.\right)$

Задача 3. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на $90°$ в положительном направлении вокруг вектора $\boldsymbol{i}$, потом на $90°$ в отрицательном направлении вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{k}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 0, 1)^T$.

$\left(\text{Ответ: } T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = (0, 1, 1)^T.\right)$

Задача 4. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на $180°$ вокруг вектора $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$, потом на $90°$ в положительном направлении вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{j}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)^T$.

$\left(\text{Ответ: } T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = (1, -1, -1)^T.\right)$