Семинар 3. Линейные подпространства. Ранг системы векторов

§1. Понятие линейного подпространства

Множество $\mathcal{M}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *линейным подпространством*, если оно является замкнуто относительно операций сложения и умножения на элементы поля, то есть выполнены свойства:
1°. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{M}$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{M}$.
2°. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$.
Любое линейное подпространство является линейным пространством.

Примеры линейных подпространств:

- Множество векторов, параллельных некоторой плоскости, в V_3.
- Множество векторов, параллельных некоторой прямой, в V_3.
- Множество векторов, перпендикулярных некоторой плоскости, в V_3.
- Множество векторов, перпендикулярных некоторому фиксированному вектору, в V_3.
- Множество решений однородной СЛАУ $Ax = 0$, в $\mathbb{R}^n$.
- Множество $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов степени, не больше 2, в пространстве $\mathbb{R}_3[t]$ многочленов степени, не больше 3.

Для каждого линейного пространства есть два неинтересных (тривиальных) примера линейных подпространств:
1) Нулевой вектор,
2) Само линейное пространство.
Любое линейное подпространство, содержащее больше одного элемента и не совпадающее со всем линейным пространством, называется *собственным* линейным подпространством. Размерность собственного линейного подпространства меньше размерности линейного пространства. Кстати, нулевой вектор принадлежит любому подпространству линейного пространства.

Задача 1. Являются ли следующие множества линейными подпространствами указанных линейных пространств:

- Множество таких векторов $\boldsymbol{x}$ в V_3, что $|\boldsymbol{x}| = 1$ (Нет).
- Множество решений неоднородной СЛАУ $Ax = b$, в $\mathbb{R}^n$ (Нет).
- Множество функций $f \in C_{[a,b]}$, удовлетворяющих условию $f(t_0) = 0$, $t_0 \in C_{[a,b]}$ (Да).
- Множество функций $f \in C_{[a,b]}$, удовлетворяющих условию $f(t_0) = 1$, $t_0 \in C_{[a,b]}$ (Нет).
- Множество всех линейных комбинаций заданных векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathcal{L}$ (Да).

Задача 2. Доказать, что заданное множество является линейным подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, найти базис и размерность подпространства.

- Множество векторов, у которых совпадают первая и последняя координаты (Размерность $n-1$, базис $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, 0)$).

- Множество векторов, у которых координаты с четными номерами равны нулю (Размерность $\frac{[n+1]}{2}$, базис $(1,0,0,\dots,0,0)$, $(0,0,1,\dots,0,0)$, $\dots$).

- Множество векторов вида $(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\dots)$ (Размерность 2, базис $(1,0,1,\dots)$, $(0,1,0,1,\dots)$, $\dots$).

Задача 3. Пусть V — векторное пространство положительной размерности над бесконечным полем $\mathbb{K}$. Доказать, что V не является объединением конечного числа своих собственных подпространств.

Решение: От противного. Пусть существуют такие собственные подпространства V_k, $k=\overline{1,n}$, что

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{x} \in V_1$, а также $\boldsymbol{y} \in V$, но $\boldsymbol{y} \notin V_1$. Такой вектор $\boldsymbol{y}$ должен существовать, поскольку V_1 — собственное подпространство (то есть оно содержит не все векторы V).

Поскольку поле $\mathbb{K}$ бесконечно, существует бесконечное число векторов вида $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Из этих векторов ни один, кроме $\boldsymbol{x}$, не принадлежит V_1. V является объединением лишь конечного числа подпространств, поэтому все векторы $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ не могут лежать в разных подпространствах. Более того, существует некоторое V_k, отличное от V_1, которое содержит бесконечное число векторов такого вида. Пусть $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} \in V_k$, причем $\alpha \neq \beta$. Значит, вектор $\boldsymbol{x}$ также принадлежит этому подпространству в силу замкнутости:

$$\frac{\beta}{\beta-\alpha}(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}) - \frac{\alpha}{\beta-\alpha}(\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}.$$

В силу произвольности выбора $\boldsymbol{x}$ можно показать, что все векторы линейного подпространства V_1 принадлежат каким-то другим подпространствам. Следовательно, можно записать, что

$$V = V_2 \cup \dots \cup V_n.$$

Аналогичным образом можно исключить все линейные подпространства из этой записи, пока не получим $V = V_n$, что означает, что подпространство V_n не является собственным. Получили противоречие.

§2. Ранг системы векторов

Линейной оболочкой[1] системы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\dots$, $\boldsymbol{e}_n$ называется множество линейных комбинаций $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\dots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n$ для всех наборов $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\dots$, $\boldsymbol{e}_n$ образует линейное пространство. *Рангом* системы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\dots$, $\boldsymbol{e}_n$ называется максимальное количество линейно независимых векторов в системе, или размерность их линейной оболочки. Линейную оболочку системы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\dots$, $\boldsymbol{e}_n$ будем обозначать $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$.

Задача 4. Найти размерность линейной оболочки $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ и показать, что $\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$, если векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе пространства $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[1] Иногда линейную оболочку называют подпространством, натянутым на векторы.

Решение: Размерность линейной оболочки $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ равна рангу матрицы, составленной из координат этих векторов:

$$\dim \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Чтобы показать, что $\boldsymbol{x} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, нужно показать, что ранг матрицы, составленной из координат векторов, равна размерности линейной оболочки:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 5. Найти размерность и базис заданной линейной оболочки системы арифметических векторов, заданных своими координатами в некотором базисе пространства $\mathbb{R}^5$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем ранг матрицы, составленной из координат векторов, с помощью метода элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5\} = 3$. В качестве базиса можно выбрать векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_5$, поскольку именно столбцы с координатами этих векторов вошли в базисный минор матрицы координат (в процессе преобразований столбцы местами не меняли).

Задача 6. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое фиксированное трехмерное подпространство арифметического пространства $\mathbb{Z}_p^4$ над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$. Найдите количество прямых (одномерных векторных пространств) в $\mathbb{Z}_p^4$, которые не содержатся в $\mathcal{M}$.

Решение: В $\mathcal{M}$ ровно p^3 векторов, поскольку множество $\mathcal{M}$ образуют все линейные комбинации вида

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}_p.$$

Всего в $\mathbb{Z}_p^4$ p^4 векторов. Значит, в $\mathcal{M}$ не содержатся

$$k_1 = p^4 - p^3$$

векторов. Однако не каждый такой вектор задает прямую, поскольку среди этих векторов есть и линейно зависимые векторы. Прямую задает некоторый направляющий вектор $\boldsymbol{x}$, а векторы вида $\lambda\boldsymbol{x}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, $\lambda \neq 0$, коллинеарны направляющему. Следовательно, в k_1 каждую прямую посчитали

$$k_2 = p - 1$$

раз (число ненулевых элементов в $\mathbb{Z}_p$). Таким образом, искомых одномерных подпространств

$$N = \frac{k_1}{k_2} = \frac{p^4 - p^3}{p - 1} = p^3.$$

§3. Дополнение системы векторов до базиса

Система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется *полной*, если любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы. Базис линейного пространства может образовывать только полная система.

Линейно независимую систему векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ можно расширить до базиса пространства $\mathcal{L}$, если $n = \dim \mathcal{L} > r$. Для этого к системе векторов нужно добавить еще $n - r$ линейно независимых векторов.

Чтобы расширить систему векторов, заданных своими координатами в некотором базисе $\mathcal{L}$, до базиса пространства $\mathcal{L}$, можно поступить следующим образом: в одну матрицу записываем координаты заданной системы векторов и координаты канонического базиса. Приводим полученную матрицу к ступенчатому виду, при этом столбцы базисного минора дают новый базис пространства $\mathcal{L}$, в котором есть векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$.

Задача 7. Проверить полноту системы матриц в $M_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Запишем компоненты матриц A_1, A_2, A_3, A_4 в матрицу (например, по столбцам) и проверим, что столбцы этой матрицы линейно независимы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В результате получили, что базисный минор матрицы содержит компоненты всех исходных матриц, а значит, система матриц полна.

Замечание. Если размерность линейного пространства совпадает количеством векторов в рассматриваемой системе, необязательно приводить матрицу компонент к треугольному виду. Достаточно показать, что матрица координат векторов невырождена.

Задача 8. Подсистему векторов $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 2, -1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, -1, 2, 0)^T$ расширить до базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение: Запишем расширенную матрицу координат и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2 \cdot \mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{|cc|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right).$$

Таким образом, система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ образует базис в $\mathbb{R}^4$.

Замечание. Конечно, это не единственный способ дополнить систему векторов до базиса в $\mathbb{R}^4$. При расширении линейно независимой системы до базиса столбцы базисного минора матрицы координат нужно выбрать так, чтобы столбцы с координатами данных векторов принадлежали базисному минору.

Задача 9. В $\mathbb{R}^4$ задана система векторов:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Выбрать максимальную линейно независимую подсистему и дополнить ее до базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение: Сначала выберем максимальную линейно независимую подсистему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -8 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathrm{span}\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$, подсистема $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ линейно независима.

Запишем теперь расширенную матрицу координат и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \; \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \right).$$

Расширенная система $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ образует базис в $\mathbb{R}^4$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ и показать, что $\boldsymbol{x} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$, если векторы заданы своими координатами в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Ответ: Размерность 3, базис $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4\}$.)

Задача 2. Систему векторов $\boldsymbol{x} = (2, 3, 0, -4)^T$ дополнить до базиса в $\mathbb{R}^4$.

(Ответ: Например, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$.)

Задача 3. В $\mathbb{R}^4$ задана система векторов:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Выбрать максимальную линейно независимую подсистему и дополнить ее до базиса в $\mathbb{R}^4$.

(Ответ: Максимальная линейно независимая подсистема $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$, векторы $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ дополняют ее до базиса.)

Задача 4. В $\mathbb{R}^5$ задана система векторов:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выбрать максимальную линейно независимую подсистему и дополнить ее до базиса в $\mathbb{R}^5$.

(Ответ: Максимальная линейно независимая подсистема $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$, векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ дополняют ее до базиса.)

Задача 5. Доказать, что система многочленов

$$t - 2, \quad t^2 - 2t + 2, \quad t^3 + 3t^2 - t + 1$$

линейно независима и дополнить ее до базиса в $\mathbb{R}_3[t]$.

(Ответ: Дополнение до базиса: 1.)