Семинар 4. Способы задания линейных подпространств

Рассмотрим два основных способа задания линейных подпространств:

- *Явный*: линейное подпространство задается как линейная оболочка некоторой системы векторов,

- *Неявный*: линейное подпространство образуют множество решений некоторой однородной СЛАУ.

Чтобы перейти от второго способа задания подпространства к первому, достаточно решить однородную СЛАУ. Тогда фундаментальная система решений СЛАУ образует базис подпространства.

Задача 1. Задать линейное подпространство с помощью линейной оболочки системы векторов. Какова размерность этого подпространства?

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 8x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0. \end{cases}$$

Решение: Найдем фундаментальную систему решений этой однородной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \\ 3 & 12 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 10 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{|cc|cc|c|} \hline 1 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right).$$

Базисными переменными являются x_1, x_2, x_5, свободными — x_3 и x_4. Пусть $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$. Тогда из первого уравнения

$$x_1 = 2x_3 + 8x_4 = 2c_1 + 8c_2,$$

из второго уравнения

$$x_2 = -x_3 - 2x_4 = -c_1 - 2c_2,$$

из третьего уравнения

$$x_5 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 8c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + c_2 \boldsymbol{e_2},$$

где векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

образуют ФСР системы. Следовательно,

$$H = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}.$$

Переход от явного способа задания подпространства к неявному — более сложная задача. Рассмотрим два подхода к решению такой задачи.

I способ. Будем рассуждать следующим образом. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — коэффициенты искомой СЛАУ. Тогда система имеет вид $\alpha B = 0$, где B — координаты векторов из линейной оболочки, записанные в матрицу. Транспонируем обе части уравнения:

$$B^T \alpha^T = 0.$$

Эту систему можно решать обычными методами. ФСР системы дает коэффициенты искомой СЛАУ. Таким образом, для нахождения коэффициентов уравнений, задающих линейное подпространство в неявном виде, нужно записать координаты векторов линейной оболочки в матрицу по строкам и решить полученную однородную систему.

II способ. Пусть линейное подпространство задано в виде линейной оболочки некоторой системы векторов:

$$H = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}.$$

Запишем координаты этих векторов в матрицу следующего вида:

$$\left([\boldsymbol{b}_1]_e, \ldots, [\boldsymbol{b}_k]_e \middle| X\right).$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|l}
a_{1j_1} & * & \ldots & * & \ldots & * & x_1' \\
0 & a_{2j_2} & \ldots & * & \ldots & * & x_2' \\
0 & 0 & \ldots & * & \ldots & * & x_3' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & a_{rj_r} & \ldots & * & x_r' \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{11}x_1 + \ldots \alpha_{1n}x_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k1}x_1 + \ldots \alpha_{kn}x_n
\end{array}\right)$$

Тогда подпространство H задается неявно системой уравнений

$$\begin{cases}
\alpha_{11}x_1 + \ldots \alpha_{1n}x_n = 0 \\
\ldots \\
\alpha_{k1}x_1 + \ldots \alpha_{kn}x_n = 0
\end{cases}$$

Задача 2. Задать подпространство $B = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ однородной СЛАУ, если

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Применим первый способ:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right).$$

Полагая свободную переменную x_4 равной $x_4 = c$, получим

$$x_3 = x_4 = c, \quad x_2 = x_3 = c, \quad x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -3c.$$

Таким образом, вектор
$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$
образует ФСР однородной системы с рассматриваемой матрицей. Значит, подпространство B задается неявно одним уравнением
$$-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Применим второй способ:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 1 & 0 & 3 & x_2 \\ 1 & -1 & 5 & x_3 \\ 1 & 1 & 4 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \to \mathrm{IV} \\ \\ \to \mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 + x_4 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 + x_4 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_3 + x_4 - 3x_1 \end{array}\right).$$
Из последней строки матрицы получим, что подпространство B задается однородной СЛАУ из одного уравнения
$$-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

При записи матрицы координаты вектора $\boldsymbol{b}_1$ записаны в последнем столбце для удобства выполнения элементарных преобразований.

Замечание. Напомню, что количество уравнений в полученной СЛАУ ($\operatorname{Null} A$) и размерность рассматриваемой линейной оболочки ($\dim A$) должны быть связаны очевидным соотношением
$$\operatorname{Null} A + \dim A = n,$$
где n — размерность линейного пространства, в котором заданы векторы этой линейной оболочки.

Задача 3. Задать подпространство $B = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ однородной СЛАУ, если
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Применим первый способ:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$
Полагая свободные переменные x_2, x_4 равными
$$x_2 = c_1, \quad x_4 = c_2,$$
получим
$$x_1 = c_1 - 2c_2, \quad x_3 = -3c_1 + 5c_2,$$
то есть
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ -3c_1 + 5c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{e_1} + c_2 \boldsymbol{e_2},$$

где векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ФСР этой СЛАУ. Следовательно, подпространство B задается системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Замечание. Никакого противоречия с записанным выше соотношением

$$\operatorname{Null} A + \dim A = n$$

здесь нет, поскольку ранг оболочки векторов $\operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ равен двум. При приведении матрицы координат векторов к треугольному виду мы в этом убедились.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Задать подпространство $B = \mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ однородной СЛАУ, если

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

(Ответ: Например, $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 & = & 0. \end{array} \right.$)

Задача 2. Найти базис пространства U, которое задается неявно системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ 7x_1 + 15x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

(Ответ: Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$)