Семинар 5. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма подпространств

§1. Понятие суммы и пересечения линейных подпространств

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $U \subset \mathcal{L}$, $W \subset \mathcal{L}$ — линейные подпространства этого линейного пространства. *Суммой* линейных подпространств U и W называется множество таких векторов $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in W$, то есть

$$\boldsymbol{z} \in U + W \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W.$$

Пересечением линейных подпространств U и W называется множество таких векторов $\boldsymbol{z}$, которые принадлежат одновременно и первому, и второму подпространству:

$$\boldsymbol{z} \in U \cap W \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{z} \in U,\ \boldsymbol{z} \in W.$$

Задача 1. Докажите, что множества $U+W$, $U \cap W$ являются линейными подпространствами.

Размерности суммы и пересечения связаны между собой *формулой Грассмана*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Чтобы найти базис суммы $U + W$, нужно объединить базисы подпространств U и W и выделить из них максимальную линейно независимую подсистему. Таким образом, для нахождения базиса суммы, подпространства U и W удобно задавать явно, то есть в виде линейной оболочки некоторых векторов.

Чтобы найти базис пересечения $U \cap W$, можно решить однородную систему линейных уравнений, которая получается объединением систем, задающих неявно подпространства U и W. Таким образом, для нахождения базиса пересечения подпространств их удобно задавать неявно. Однако это не является обязательным, о чем мы поговорим позднее.

Задача 2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

1) Найти размерности подпространств:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Выбрать из векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базисы соответствующих подпространств.
2) Задать подпространства U и W неявно (в виде однородной системы линейных уравнений),
3) Найти размерность суммы $U + W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U + W$,
4) Найти размерность и базис пересечения $U \cap W$ подпространств U и W,
5) Проверить связь между размерностями рассматриваемых подпространств по формуле Грассмана.

Решение:

1) Для этого достаточно найти ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :4 \\ :7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & -2 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

значит,

$$\operatorname{Rg} A = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim U = 2.$$

Базис подпространства U можно выбрать из векторов, координаты которых образуют столбцы базисного минора. Например, базисом подпространства U являются векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$. Аналогично,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{IV} \\ \\ \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -6\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to \mathrm{IV} \\ \to \mathrm{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{|c|cc|} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 10 \end{array}\right)$$

значит,

$$\operatorname{Rg} B = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim W = 3.$$

Базис подпространства W можно выбрать из векторов, координаты которых образуют столбцы базисного минора, то есть $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$.

2) Чтобы задать неявно подпространство U, решим систему с матрицей A^T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -7\cdot\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Пусть α_1, α_2 — базисные переменные, а $\alpha_3 = C_1$, $\alpha_4 = C_2$ — свободные. Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты ФСР равны коэффициентам однородной системы уравнений, неявно задающей подпространство U. Значит, подпространство U описывается системой уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы задать неявно подпространство W, решим систему с матрицей B^T:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \mathrm{III} \\ \to \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -12 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ +3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-8) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3\cdot\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{|cc|c|c|} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Пусть свободной переменной является $\alpha_3 = C$, а остальные переменные будем считать базисными. Выражая последовательно базисные переменные через свободные, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, подпространство W задается неявно системой из одного уравнения

$$\left\{ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \right.$$

3) Чтобы найти базис и размерность подпространства $U + W$, запишем в матрицу координаты базисов пространств U и W и приведем ее к ступенчатому виду. Столбцы базисного минора образуют координаты векторов базиса пространства $U + W$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -7\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} \text{третья строка} \\ \text{линейно зависит} \\ \text{от второй} \end{matrix}\right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-8) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{|cc|cc|c|} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В базисный минор вошли первый, второй и последний столбцы. В исходной матрице там были записаны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. Значит, эти векторы и образуют базис пространства $U + W$. Итак,

$$U + W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Конечно, это не единственный способ задать базис пространства $U + W$, поскольку и базисный минор тоже можно выбрать по-разному.

4) Для нахождения базиса пересечения объединим в одну систему линейные однородные уравнения, задающие неявно пространства U и W:

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим базис пространства $U \cap W$. В данном случае заметим, что первое и последнее уравнение этой системы совпадают, а потому эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Решать эту систему не обязательно, ведь мы же знаем, что именно эта система задавала пространство U неявно. Значит,

$$U \cap W = U = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$$

и

$$\dim(U \cap W) = 2.$$

5) Полученный результат согласуется с формулой Грассмана. В самом деле,

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 3 - 3 = 2,$$

что у нас и получилось.

Задача 3. Подпространство U задано неявно системой линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

Подпространство W задано как линейная оболочка следующих векторов

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

1) Найти векторы $\boldsymbol{a}_i$, задающие базис подпространства U,
2) Найти размерность и выбрать из векторов $\boldsymbol{b}_j$ базис подпространства W,
3) Задать подпространство W неявно,
4) Найти размерность суммы $U + W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U + W$,
5) Найти размерность и базис пересечения подпространств $U \cap W$,
Проверить связь между размерностями рассматриваемых подпространств по формуле Грассмана.

Решение:

1) Для того, чтобы найти базис и размерность подпространства U, решим данную систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{matrix} \right).$$

Выбирая переменные x_1, x_2 в качестве базисных, а $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ считая свободными, получим общее решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Эти векторы образуют базис пространства U, то есть

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad \dim U = 2.$$

2) Чтобы найти размерность и базис подпространства W, запишем координаты образующих векторов в матрицу и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3\cdot\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|cc|} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Таким образом,

$$W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}, \quad \dim W = 2.$$

Конечно, базис W можно выбрать и иначе, в зависимости от выбора базисного минора.

3) Зададим пространство W неявно. Для этого запишем координаты базисных векторов в матрицу по строкам и решим однородную СЛАУ с такой матрицей:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Общее решение такой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Используя ФСР этой системы в качестве коэффициентов однородной системы уравнений, задающей W, получим

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0. \end{cases}$$

4) Найдем размерность суммы $U + W$, записав в матрицу координаты базисов подпространств U и W

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2\cdot\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \mathrm{IV} \\ :2 \\ \to \mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{|ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

а значит,

$$U + W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2\}, \quad \dim(U + W) = 3.$$

5) Чтобы найти размерность пересечения, решим СЛАУ, полученную объединением уравнений, задающих неявно подпространства U и W:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_4 & = & 0 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Опуская выкладки, приведу только решение:

$$U \cap W = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\}, \quad \dim(U \cap W) = 1.$$

Проверку по формуле Грассмана выполните самостоятельно.

§2. Нахождение базиса пересечения в явном виде

Для того, чтобы найти базис пересечения подпространств, необязательно задавать подпространства неявно. Для нахождения базиса пересечения могут быть использованы следующие соображения.

Пусть подпространство U порождается векторами $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, а подпространство W порождается векторами $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_r$. Любой вектор, принадлежащий U, может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, то есть существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k, \quad \boldsymbol{u} \in U.$$

Аналогично существуют такие коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_r$, что

$$\boldsymbol{w} = \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{y}_r, \quad \boldsymbol{w} \in W.$$

Если подпространство $U \cap W$ не пусто, то существует вектор, который принадлежит обоим подпространствам, то есть найдется такая нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами α_i, β_j, что

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$$

или

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{y}_r$$

или

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k - \beta_1 \boldsymbol{y}_1 - \cdots - \beta_r \boldsymbol{y}_r = 0.$$

Последнее уравнение представляет собой однородную СЛАУ, в столбцах которой записаны координаты базисных векторов пространств U и W. Решив ее, найдем коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ линейной комбинации базисных векторов. Вектор

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k$$

может быть выбран как базис пересечения подпространств.

Если же ФСР записанной СЛАУ относительно коэффициентов α_i, β_j содержит несколько векторов, каждый из них дает коэффициенты линейной комбинации для нахождения вектора базиса пересечения подпространств.

Найдем базис пересечения подпространств таким образом в следующей задаче.

Задача 4. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Подпространства U и W определяются следующим образом:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}.$$

Выбрать из векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U \cap W$, указать размерность этого пространства.

Решение: Если пересечение $U \cap W$ не пусто, должны существовать нетривиальные комбинации $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2$, $\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2$, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2$$

или

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \beta_1 \boldsymbol{b}_1 - \beta_2 \boldsymbol{b}_2 = 0.$$

Подставив координаты векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$, получим

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -4\cdot \mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \to \mathrm{IV} \\ :(-2) \\ \to \mathrm{II} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} +\mathrm{III} \\ +2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{|c|c|cc|} \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right).$$

Считая $\alpha_2 = C$ свободной переменной, а остальные — базисными, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нам достаточно найти нетривиальные решения этой системы, в качестве которых отлично подойдет ФСР. Поэтому в нашем случае

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = -3, \quad \beta_2 = 0.$$

Значит, базис пересечения задается линейной комбинацией векторов $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ или $\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 = -3\boldsymbol{b}_1$. Подстановка координат векторов дает

$$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$-3\boldsymbol{b}_1 = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Совпадение координат этих векторов является хорошей проверкой правильности решения системы. Конечно, в данном случае достаточно

$$U \cap W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1\}.$$

Размерность пересечения равна
$$\dim(U \cap W) = 1.$$

§3. Прямая сумма подпространств

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $U \subset \mathcal{L}$, $W \subset \mathcal{L}$ — линейные подпространства этого линейного пространства. Сумма подпространств $U + W$ называется *прямой*, если для любого $\boldsymbol{x} \in U + W$ можно найти разложение

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_U + \boldsymbol{x}_W, \quad \boldsymbol{x}_U \in U, \, \boldsymbol{x}_W \in W,$$

причем это разложение единственно.

Согласно *критерию прямой суммы*, сумма $U + W$ подпространств является прямой тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.

Прямая сумма обозначается $U \oplus W$.

Если $U \oplus W = \mathcal{L}$ и для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ справедливо

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_U + \boldsymbol{x}_W, \quad \boldsymbol{x}_U \in U, \, \boldsymbol{x}_W \in W,$$

то вектор $\boldsymbol{x}_U$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство U вдоль W. Аналогично, вектор $\boldsymbol{x}_W$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство W вдоль U.

Задача 5. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Пусть подпространства U и W заданы следующим образом:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Доказать, что сумма $U + W$ подпространств U и W является прямой и найти проекцию вектора
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T$$
на каждое из подпространств вдоль другого.

Решение: Чтобы доказать, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, достаточно показать, что $\dim(U \cap W) = 0$. Для этого найдем размерности подпространств U, W и $U + W$ и воспользуемся формулой Грассмана. В этой части решения я позволю себе опускать конкретные выкладки, приведя лишь ответы.

Составим матрицы из координат $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и найдем ранги этих матриц. Имеем

$$\operatorname{Rg} A = 2, \quad \operatorname{Rg} B = 2.$$

Значит,
$$\dim U = 2, \quad \dim W = 2,$$

а базисы подпространств выбирается следующим образом:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}.$$

Найдем ранг матрицы, в которой по столбцам записаны координаты всех векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Таким образом, размерность $\dim(U \cap W)$ пересечения подпространств равна

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus W.$$

Теперь найдем проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ на каждое из этих подпространств вдоль другого. Имеем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_U + \boldsymbol{x}_W, \quad \boldsymbol{x}_U \in U, \, \boldsymbol{x}_W \in W.$$

Поскольку любой вектор в подпространстве можно представить в виде линейной комбинации векторов из базиса, то

$$\boldsymbol{x}_U = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{x}_W = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2.$$

и отсюда

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2,$$

Эта задача сводится к обычной задаче разложения вектора по базису, или к задаче решения неоднородной СЛАУ со следующей расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Находя решение методом Гаусса или Крамера, получим

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 4,$$

что означает

$$\boldsymbol{x}_U = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{x}_W = 3\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2.$$

В итоге получим

$$\boldsymbol{x}_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_W = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве проверки правильности решения системы можно найти вектор $\boldsymbol{x}_U + \boldsymbol{x}_W$. Он должен быть равен вектору $\boldsymbol{x}$.

Заметим, что если положить

$$W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3\},$$

мы бы получили другие коэффициенты разложения, но те же векторы $\boldsymbol{x}_U$ и $\boldsymbol{x}_W$.

Задача 6. Доказать, что пространство $M_n(\mathbb{R})$ квадратных матриц с действительными коэффициентами является прямой суммой подпространства симметричных и подпространства кососимметричных матриц и найти проекции произвольной матрицы A на каждое из подпространств вдоль другого.

Замечание к решению: Сначала вспомните размерности пространств $M_n(\mathbb{R})$, а также подпространств симметричных и кососимметричных матриц и убедитесь в том, что размерность $M_n(\mathbb{R})$ равна сумме размерности подпространств симметричных и кососимметричных матриц. Это еще не является доказательством того, что сумма пространств является прямой, однако является хорошей проверкой.

Для любой квадратной матрицы верно

$$A = \frac{1}{2}\big(A + A^T\big) + \frac{1}{2}\big(A - A^T\big).$$

Остается показать, что матрица $A + A^T$ является симметричной, а матрица $A - A^T$ — кососимметричной.

Задача 7. Доказать, что множество всех непрерывных функций на некотором симметричном отрезке вещественной прямой является прямой суммой подпространств четных и нечетных функций.

Замечание к решению: Поскольку рассматриваемые подпространства и само линейное пространство являются бесконечномерными, применение формулы Грассмана не удастся. В данном случае достаточно показать, что любая непрерывная функция на некотором симметричном отрезке вещественной прямой является суммой четной и нечетной функций. Для любой функции, определенной на симметричном отрезке вещественной прямой, верно

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big).$$

Докажите, что функция $f(x) + f(-x)$ является четной, а $f(x) - f(-x)$ — нечетной.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T.$$

1) Найти размерности подпространств:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Выбрать из векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базисы соответствующих подпространств.
2) Задать подпространства U и W неявно (в виде системы однородных линейных уравнений),
3) Найти размерность суммы $U + W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U + W$,
4) Найти размерность и базис пересечения подпространств $U \cap W$,
5) Проверить связь между размерностями рассматриваемых подпространств по формуле Грассмана.

Ответ: 1) $\dim U = 3$, $\dim W = 2$.
2) U задается уравнением $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, W — системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 & = & 0. \end{cases}$$

3) $U + W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1\}$.
4) $U \cap W = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\}$.

Задача 2. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

1) Найти размерности подпространств:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Выбрать из векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базисы соответствующих подпространств.
2) Задать подпространства U и W неявно (в виде однородной системы линейных уравнений),
3) Найти размерность суммы $U + W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U + W$,
4) Найти размерность и базис пересечения подпространств $U \cap W$,
5) Проверить связь между размерностями рассматриваемых подпространств по формуле Грассмана.

Ответ: 1) $\dim U = 3$, $\dim W = 2$.
2) U задается системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ x_4 - x_5 & = & 0, \end{cases}$$

а W —

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 8x_5 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ -x_2 + x_4 + 3x_5 & = & 0. \end{cases}$$

3) $U+W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$.

4) $U\cap W$ пусто.

Задача 3. Подпространство U задано неявно системой линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+11x_4 &= 0\\ -x_1+2x_2+8x_3-2x_4 &= 0\end{cases}$$

Подпространство W задано как линейная оболочка следующих векторов

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & -2\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8 & -2\end{pmatrix}^T.$$

1) Найти базис $\boldsymbol{a}_i$ и размерность подпространства U,
2) Найти размерность и выбрать из векторов $\boldsymbol{b}_j$ базис подпространства W,
3) Задать подпространство W неявно,
4) Найти размерность суммы $U+W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U+W$,
5) Найти размерность и базис пересечения подпространств $U\cap W$.

Ответ: 1) $\dim U=2$, U порождается векторами

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T.$$

2) $W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$.

3) W задается уравнением $-4x_1+3x_2+2x_3+2x_4=0$.

4) $U+W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$.

5) $U\cap W=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & -1\end{pmatrix}^T\}$.

Задача 4. Подпространство U задано неявно системой линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_2+2x_3-x_4 &= 0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 0\end{cases}$$

Подпространство W задано неявно системой линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3 &= 0\\ x_1-x_4 &= 0\end{cases}$$

1) Найти базис $\boldsymbol{a}_i$ и размерность подпространства U,
2) Найти базис $\boldsymbol{b}_j$ и размерность подпространства W,
3) Найти базис и размерность суммы $U+W$ подпространств,
4) Найти базис и размерность пересечения $U\cap W$ подпространств.

Ответ: 1) $\dim U=2$, U порождается векторами

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T.$$

2) $\dim W=2$, W порождается векторами

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T.$$

3) $U+W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\}$.

4) $U\cap W=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T\}$.

Задача 5. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 3\end{pmatrix}^T.$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Пусть подпространства U и W заданы следующим образом:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Выбрать из векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис $U \cap W$, указать размерность этого пространства.

Ответ: Пересечение задается вектором $-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Пусть подпространства U и W заданы следующим образом:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

Доказать, что сумма $U + W$ подпространств U и W является прямой и найти проекцию вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T$$

на каждое из подпространств вдоль другого.

Ответ: $\boldsymbol{x}_U = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{x}_W = \boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}^T$.