Семинар 6. Линейные функции

§1. Линейные функции (формы) в линейном пространстве

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f\colon \mathcal{L} \to \mathbb{F}$ называют *линейной функцией* (линейной формой, линейным функционалом) на $\mathcal{L}$, если
1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$,
2) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любого элемента поля $\lambda \in \mathbb{F}$.

В силу указанных свойств линейная форма однозначно определяется своими значениями на базисных векторах.

Задача 1. Являются ли следующие отображения $f\colon V_3 \to \mathbb{R}$ линейными формами? Пусть $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$.

- $f = 2x$ (Да).
- $f = 2x + 1$ (Нет).
- $f = x - y + z$ (Да).
- $f = x^2 - 4y + z$ (Нет).
- $f = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ для некоторого заданного вектора $\boldsymbol{a} \in V_3$ (Да).

Задача 2. Являются ли следующие отображения линейными формами?

- $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr} X$ (Да).
- $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr}(A + X)$ для заданной матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ (Нет).
- $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$ (Нет).
- $f\colon \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x'(t_0)$ (Да).

Покажем, что линейная форма однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Пусть $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — базис $\mathcal{L}$, пусть $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Тогда

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n).$$

Обозначим

$$f(\boldsymbol{e}_1) = a_1, \quad \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) = a_n,$$

тогда

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

Последнюю строку можно переписать в виде $[f] = (a_1, \ldots, a_n)$ и считать ее строкой координат линейной формы f в базисе $\mathcal{E}$. Координаты линейных форм, в отличие от координат векторов линейного пространства, принято записывать по строкам.

Задача 3. Найти строку координат линейной формы в стандартном базисе.

- $f\colon V_3 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$. $f(\boldsymbol{x}) = 2x$ $\big([f] = (2, 0, 0)\big)$.
- $f\colon V_3 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$, $f(\boldsymbol{x}) = x - y + z$ $\big([f] = (1, -1, 1)\big)$.
- $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr} X$ $\big(f(E_{ij}) = \delta^i_j\big)$.

- $f\colon \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x'(t_0)$ $\big([f] = (0, 1, 2t_0, \ldots, nt_0^{n-1})\big)$.

Линейные формы можно складывать и умножать на элементы поля по следующим правилам:
1) $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$,
2) $(\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$.

Множество всех линейных форм с такими операциями образует линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Его называют *сопряженным* к $\mathcal{L}$ пространством и обозначают $\mathcal{L}^*$. Можно показать, что

$$\dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}.$$

Поскольку $\mathcal{L}^*$ является линейным пространством, в нем можно выбрать базис. Как это можно сделать?

Базисы $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F} = (f^1, \ldots, f^n)$ пространства $\mathcal{L}^*$ называют *биортогональными* (двойственными, взаимными, дуальными), если $f^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$.

Задача 4. Найти базис пространства $(\mathbb{R}^2)^*$, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^2$.

Решение: Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1$ действительно образуют базис $\mathbb{R}^2$, в чем можно убедиться, вычислив определитель из координат векторов. Пусть $f^1 = ax + by$, $f^2 = cx + dy$ — искомый базис. Тогда из условия биортогональности для линейной формы f^1

$$f^1(\boldsymbol{e}_1) = 1, \quad f^1(\boldsymbol{e}_2) = 0$$

получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a - 3b &= 1 \\ 2a - 5b &= 0 \end{cases}$$

Решение системы

$$a = -5, \quad b = -2,$$

то есть $f^1 = -5x - 2y$. Аналогично, из условия биортогональности для линейной формы f^2

$$f^2(\boldsymbol{e}_1) = 0, \quad f^2(\boldsymbol{e}_2) = 1$$

получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} c - 3d &= 0 \\ 2c - 5d &= 1 \end{cases}$$

Решение системы

$$c = 3, \quad d = 1,$$

то есть $f^2 = 3x + y$. Итак, биортогональный базис образуют линейные формы

$$f^1 = -5x - 2y, \quad f^2 = 3x + y.$$

Замечание. Проанализировав процедуру нахождения биортогонального базиса, несложно заметить, что для решения задачи достаточно обратить матрицу перехода к стандартному базису

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

и взять ее строки:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)_{+3\cdot \mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)^{-2\cdot \mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, для нахождения биортогонального базиса достаточно обратить матрицу координат заданного базиса и взять ее строки.

Задача 5. Найти базис пространства $(\mathbb{R}^3)^*$, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\16\end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение: Воспользуемся замечанием к предыдущей задаче и обратим матрицу методом элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -72 & 20 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Значит, биортогональный базис образуют линейные формы

$$f^1 = -72x + 20y + 11z, \quad f^2 = 26x - 7y - 4y, \quad f^3 = 7x - 2y - z.$$

Задача 6. Пусть V — линейное пространство размерности n над полем из q элементов и $l \in V^*$ — ненулевая линейная функция на V. Найти количество таких векторов $\boldsymbol{x} \in V$, что $l(\boldsymbol{x}) = 1$.

Решение: Всего в V ровно q^n векторов. Любая ненулевая функция $l \in V^*$ принимает каждое из q значений, причем каждое значение она принимает одинаковое число раз (в силу линейности). Значит, число таких векторов

$$\frac{q^n}{q} = q^{n-1}.$$

§2. Ядро линейной функции

Ядром линейной функции l, заданной в линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$, называют множество

$$\ker l = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{L} \,|\, l(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Задача 7. Доказать, что ядро линейной функции образует подпространство в $\mathcal{L}$.

Решение: Замкнутость достаточно очевидна. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \ker l$, то есть $l(\boldsymbol{x}_1) = 0$, $l(\boldsymbol{x}_2) = 0$, и пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда

$$l(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = l(\boldsymbol{x}_1) + l(\boldsymbol{x}_2) = 0 + 0 = 0,$$

$$l(\lambda \boldsymbol{x}_1) = \lambda l(\boldsymbol{x}_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Задача 8. Найти ядро линейной функции $f = x - 2y + z$ над $\mathbb{R}^3$.
Решение: Согласно определению получим

$$x - 2y + z = 0.$$

Найдем общее решение этого уравнения методом Гаусса. Оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\ker f = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}.$$

Кстати, понятие ядра линейной функции позволяет формализовать неявный способ задания линейного подпространства: линейное подпространство задается неявно в виде пересечения ядер некоторых линейных функций.

§3. Аннулятор линейного подпространства

Пусть задано $V \subset \mathcal{L}$ — подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$. *Аннулятором* подпространства V называют подмножество сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$, определенное следующим образом:

$$V^0 = \{f \in \mathcal{L}^* \mid f(\boldsymbol{x}) = 0, \, \forall \boldsymbol{x} \in V\}.$$

Задача 9. Доказать, что V^0 образует подпространство в $\mathcal{L}^*$.

Указания к решению: Проверьте замкнутость множества относительно операций сложения линейных форм и умножения формы на элемент поля.

Задача 10. Найти аннулятор подпространства

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \subset \mathbb{R}^4,$$

где

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Пусть аннулятор образуют линейные функции вида

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4.$$

Тогда для определения коэффициентов α_i получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы ФСР возьмем в качестве двух линейно независимых решений системы. Таким образом, аннулятор V^0 образуют линейные формы

$$f^1 = x_1 + x_2 - 2x_4, \quad f^2 = -x_1 + x_3 + x_4.$$

§4. Преобразование коэффициентов линейной функции при замене базиса

Пусть $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — два базиса в $\mathcal{L}$, $U = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}$ — матрица перехода из $\boldsymbol{b}$ в $\boldsymbol{c}$. Тогда биортогональные базисы $\boldsymbol{b}^*$ и $\boldsymbol{c}^*$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{c}^* U^T \quad \text{или} \quad \boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{b}^*(U^T)^{-1}.$$

При этом координаты линейной формы f в этих базисах связаны соотношением

$$[f]_{\boldsymbol{c}^*} = [f]_{\boldsymbol{b}^*} U.$$

При этом

$$T_{\boldsymbol{b}^*\to\boldsymbol{c}^*} = (U^T)^{-1}.$$

Задача 11. Пусть $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ задан соотношениями

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Найти взаимный базис $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \boldsymbol{b}_3^*\}$, матрицу перехода $T_{\mathcal{E}^*\to\mathcal{B}^*}$, а также координаты линейной формы $f = 3\boldsymbol{e}_1^* + 2\boldsymbol{e}_2^* - \boldsymbol{e}_3^*$ в базисе $\mathcal{B}^*$.

Решение: Матрица перехода из базиса $\mathcal{E}$ в базис $\mathcal{B}$ равна

$$U = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем биортогональный базис. Для этого обратим матрицу U^T:

$$T_{\mathcal{E}^*\to\mathcal{B}^*} = (U^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, биортогональный к $\mathcal{B}$ базис образуют линейные формы

$$\boldsymbol{b}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{b}_1^* = \boldsymbol{e}_1^* - \boldsymbol{e}_2^*, \quad \boldsymbol{b}_2^* = \boldsymbol{e}_2^* - \boldsymbol{e}_3^*, \quad \boldsymbol{b}_3^* = \boldsymbol{e}_3^*.$$

Для того, чтобы найти координаты линейной формы f в базисе $\mathcal{B}$, используем формулу $[f]_{\boldsymbol{b}^*} = [f]_{\boldsymbol{e}^*} U$. Получим

$$[f]_{\boldsymbol{b}^*} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

что также можно записать как

$$f = 3\boldsymbol{b}_1^* + 5\boldsymbol{b}_2^* + 4\boldsymbol{b}_3^*.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти базис пространства $(\mathbb{R}^2)^*$, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^2$.

Ответ: $f^1 = -3x - 2y$, $f^2 = -2x - y$.

Задача 2. Найти ядро линейной функции $f = 2x + 3y - z$ над $\mathbb{R}^3$.

Ответ: $\ker f = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T\}$.

Задача 3. Найти аннулятор подпространства

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \subset \mathbb{R}^4,$$

где

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Ответ: $f^1 = 4x_1 - x_2 + x_4, \quad f^2 = 2x_1 - x_3 + 2x_4$.

Задача 4. Пусть $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ задан соотношениями

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3.$$

Найти взаимный базис $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \boldsymbol{b}_3^*\}$, матрицу перехода $T_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{B}^*}$, а также координаты линейной формы $f = \boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{e}_2^* + \boldsymbol{e}_3^*$ в базисе $\mathcal{B}^*$.

Ответ: 1) $T_{\mathcal{E}^* \to \mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \boldsymbol{b}_1^* - \boldsymbol{b}_2^* + \boldsymbol{b}_3^*$.