Семинар 7. Евклидово пространство

§1. Понятие скалярного произведения и евклидова пространства

Линейное пространство $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ этого пространства поставлен в соответствие элемент $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ поля $\mathbb{F}$, причем
1^{o}. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
2^{o}. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$,
3^{o}. $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
4^{o}. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ только при $\boldsymbol{x} = 0$.

Операцию $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющую свойствам $1^{\text{o}} - 4^{\text{o}}$, называют *скалярным умножением*, а элемент $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполнено *неравенство Коши-Буняковского*:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ заданы своими координатами в некотором базисе пространства $\mathcal{L}$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T,$$

то в качестве скалярного произведения можно выбрать

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Это стандартный способ задания скалярного произведения. Тем не менее, он не является единственным.

Задача 1. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ — произвольные векторы $\mathbb{R}^2$. Показать, что скалярное произведение можно задать следующим образом:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1 y_1 + 5x_2 y_2.$$

Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = (1, -2)$, $\boldsymbol{y} = (5, 1)$.

Решение: Свойства $1^{\text{o}} - 4^{\text{o}}$ можно проверить непосредственно. Вычислим скалярное произведение векторов:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) \cdot 1 = 0.$$

Задача 2. Доказать, что в пространстве многочленов $\mathbb{R}_3[t]$ скалярное произведение можно задать следующим образом:

$$(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3.$$

Вычислить скалярное произведение многочленов

$$p(t) = 1 + t + t^2, \quad q(t) = t - 2t^2 + 3t^3.$$

Решение: Свойства $1^{\text{o}} - 4^{\text{o}}$ можно проверить непосредственно. Вычислим скалярное произведение многочленов:

$$(p, q) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = -1.$$

Задача 3. Доказать, что в пространстве непрерывных функций $C_{[a,b]}$ соотношение

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(t) g(t) dt$$

задает скалярное произведение. Выписать неравенство Коши-Буняковского в этом случае.

Решение: Свойства $1^o - 4^o$ можно проверить непосредственно. Неравенство Коши-Буняковского в данном случае имеет вид:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}.$$

Задача 4. Задает ли указанная операция скалярное произведение?

- $A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$ (Нет).
- $A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(A,B) = \operatorname{tr}(A^T B)$ (Да).
- $A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ f(A,B) = \det(AB)$ (Нет).
- $x(t), y(t) \in C_{[a,b]},\ f(x,y) = x(a)y(a)$ (Нет).
- $x(t), y(t) \in C_{[0,2]},\ f(x,y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ (Нет).

В евклидовом пространстве можно ввести понятие длины вектора. *Длиной* вектора $\boldsymbol{x}$ называют число $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$.

Вектор, длина которого равна 1, называют *нормированным.* Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, для которых $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, называют *ортогональными.* Базис линейного пространства $\mathcal{L}$ называют *ортогональным*, если все векторы базиса попарно ортогональны. Если при этом длина каждого вектора базиса равна 1, то базис называют *ортонормированным.*

§2. Ортогональное дополнение

Понятие ортогональности дает возможность рассмотреть еще один объект — ортогональное дополнение некоторого подпространства линейного пространства. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $V \subset \mathcal{L}$ — его подпространство. Вектор $\boldsymbol{x}$ называют *ортогональным* подпространству V, если он ортогонален каждому вектору подпространства:

$$\boldsymbol{x} \perp V \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\, \forall \boldsymbol{y} \in V.$$

Множество всех векторов, ортогональных V, называют *ортогональным дополнением* подпространства V и обозначают $V^\perp$. Можно показать, что $V^\perp$ является подпространством в $\mathcal{L}$ и

$$V \oplus V^\perp = \mathcal{L}.$$

Далее в задачах полагаем, что скалярное произведение задано стандартным образом, если прямо не оговорено обратное.

Задача 5. Найти ортогональное дополнение к подпространству в $\mathbb{R}^4$, натянутому на векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Пусть искомые векторы ортогонального дополнения заданы своими координатами в стандартном базисе $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$. Тогда скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)$ равно

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4.$$

Вектор $\boldsymbol{x}$ должен быть ортогонален каждому вектору подпространства, включая $\boldsymbol{e}_1$, а значит, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = 0$, то есть

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0.$$

Добавляя условие ортогональности вектору $\boldsymbol{e}_2$, получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Фундаментальную систему решений этой СЛАУ составляют векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Таким образом,

$$V^\perp = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}.$$

Задача 6. Описать явно и неявно ортогональное дополнение к подпространству $V \subset \mathbb{R}^4$, заданному однородной системой линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - 3x_2 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Решение: Поскольку выражение $2x_1 - 3x_2$ задает скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ и $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, вектор $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ будет ортогонален каждому вектору из V. Аналогично, вектор $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ ортогонален любому вектору из подпространства V. Таким образом,

$$V^\perp = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Для получения коэффициентов системы, которая неявно задает $V^\perp$, достаточно решить данную СЛАУ, задающую неявно пространство V. Получим, что неявно ортогональное дополнение задается системой:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

Выкладки опускаю.

§3. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $V \subset \mathcal{L}$ — его подпространство. Как уже упоминалось,

$$V \oplus V^\perp = \mathcal{L}.$$

Таким образом, любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in V, \, \boldsymbol{z} \in V^\perp.$$

При этом вектор $\boldsymbol{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство V, а вектор $\boldsymbol{z}$ — ортогональным дополнением вектора $\boldsymbol{x}$ к подпространству V.

Задача 7. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

на подпространство

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Пусть

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in V, \, \boldsymbol{z} \in V^{\perp},$$

где $\boldsymbol{y}$ — ортогональная проекция на V, а $\boldsymbol{z}$ — ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{x}$ к V. Тогда $\boldsymbol{y} \in V$, что означает, что $\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$, то есть

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{z}. \tag{1}$$

Умножим (1) скалярно на $\boldsymbol{a}_1$:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{z}).$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = -4, \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) = 3, \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 1.$$

Кроме того, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{z}) = 0$, поскольку $\boldsymbol{z} \in V^{\perp}$. Подстановка скалярных произведений в уравнение выше дает:

$$-4 = 3\lambda_1 + \lambda_2.$$

Аналогично, умножим (1) скалярно на $\boldsymbol{a}_2$:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{z}).$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = 10, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) = 1, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = 6.$$

Подстановка скалярных произведений в уравнение выше дает:

$$10 = \lambda_1 + 6\lambda_2.$$

Решение системы

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 & = & -4 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 & = & 10 \end{cases}$$

имеет вид

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2.$$

Найдем ортогональную проекцию

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

откуда ортогональная составляющая равна

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Для проверки можно убедиться, что $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ или $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{z}) = 0$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{z}) = 0$.

Задача 8. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T$$

на подпространство

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Заметим, что $\dim V = 2$, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} -2 \cdot \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому можно считать, что $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$. Однако если этого не заметить, то задача прекрасно решается напрямую.

Пусть

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in V,\ \boldsymbol{z} \in V^{\perp}.$$

Умножим это выражение скалярно на $\boldsymbol{a}_1$:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + \lambda_3(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3),$$

что дает уравнение

$$4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 4.$$

Умножим выражение скалярно на $\boldsymbol{a}_2$:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + \lambda_3(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3),$$

что дает уравнение

$$4\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 = -8.$$

Умножим выражение скалярно на $\boldsymbol{a}_3$:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) + \lambda_3(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3),$$

что дает уравнение

$$4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 10\lambda_3 = 16.$$

Частное решение системы

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 & = & -4 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 8 \end{cases}$$

имеет вид

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 0.$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, но достаточно взять одно из них. Найдем ортогональную проекцию

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

откуда ортогональная составляющая равна

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

на подпространство, заданное неявно системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0. \end{cases}$$

Решение: Можно решить заданную систему, найти базис пространства V и таким образом свести задачу к предыдущей. Но мы так делать не будем. Здесь векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}^T$$

задают базис ортогонального дополнения $V^\perp$. Пусть

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2, \quad \boldsymbol{y} \in V, \, \boldsymbol{z} \in V^\perp.$$

Умножим это выражение скалярно на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2),$$

что дает уравнение

$$7\lambda_1 + 8\lambda_2 = 7.$$

Умножим выражение скалярно на $\boldsymbol{f}_2$:

$$(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2),$$

что дает уравнение

$$8\lambda_1 + 31\lambda_2 = 8.$$

Решение системы

$$\begin{cases} 7\lambda_1 + 8\lambda_2 &= 7 \\ 8\lambda_1 + 31\lambda_2 &= 8 \end{cases}$$

имеет вид

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.$$

Найдем ортогональную составляющую

$$\boldsymbol{z} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда ортогональная проекция равна

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

§4. Матрица Грама системы векторов

Матрицей Грама системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называют матрицу, составленную из попарных скалярных произведений этих векторов:

$$\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n) \\ (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2) & \ldots & (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама невырождена для любой линейно независимой системы векторов. Кроме того, она симметрична в силу коммутативности скалярного произведения. Если скалярное произведение задано стандартным образом, то матрицу Грама системы векторов можно вычислить как

$$\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = A^T A,$$

где A — матрица, в которой по столбцам записаны координаты векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Задача 10. Пусть $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — три целочисленных вектора евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Доказать, что определитель матрицы Грама $\Gamma(\boldsymbol{a})$ — квадрат целого числа.

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления матрицы Грама:

$$\det(\Gamma(\boldsymbol{a})) = \det(A^T A) = \det(A) \cdot \det(A) = \big(\det(A)\big)^2.$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ имеют целочисленные координаты, то и $\det(A)$ — тоже целое число.

Расстоянием от вектора $\boldsymbol{x}$ до подпространства V называют минимальную длину вектора $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y} \in V$:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V) = \inf_{\boldsymbol{y} \in V} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ до подпространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, можно вычислять с помощью матрицы Грама следующим образом:

$$\operatorname{dist}^2(\boldsymbol{x}, V) = \frac{|\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)|}{|\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)|}.$$

Задача 11. Найти расстояние от вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

до подпространства

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления расстояния с помощью определителя матрицы Грама. Составим матрицу A из координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенную матрицу B из координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = B^T B = \begin{pmatrix} 39 & -4 & 10 \\ -4 & 3 & 1 \\ 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)| = \begin{vmatrix} 39 & -4 & 10 \\ -4 & 3 & 1 \\ 10 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 187,$$

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 17,$$

откуда

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V) = \sqrt{\frac{187}{17}} = \sqrt{11}.$$

Задача 12. Найти расстояние от вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

до подпространства, заданного неявно системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Решение: Чтобы найти базис заданного подпространства, решим данную СЛАУ. Фундаментальную систему решений этой СЛАУ составляют векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Составим матрицу A из координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенную матрицу B из координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = B^T B = \begin{pmatrix} 21 & 1 & -11 \\ 1 & 11 & 32 \\ -11 & 32 & 107 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)| = \begin{vmatrix} 21 & 1 & -11 \\ 1 & 11 & 32 \\ -11 & 32 & 107 \end{vmatrix} = 1071,$$

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = A^T A = \begin{pmatrix} 11 & 32 \\ 32 & 107 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)| = \begin{vmatrix} 11 & 32 \\ 32 & 107 \end{vmatrix} = 153,$$

откуда

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},V)=\sqrt{\frac{1071}{153}}=\sqrt{7}.$$

§5. Расстояние до подпространства и угол между вектором и подпространством

Другой способ вычисления расстояния от вектора до подпространства заключается в нахождении длины ортогональной составляющей:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},V)=|\boldsymbol{z}|,\quad \text{если } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\quad \boldsymbol{y}\in V,\ \boldsymbol{z}\in V^{\perp}.$$

Углом между вектором и подпространством называют угол между вектором и его ортогональной проекцией на подпространство. Косинус этого угла может быть найден с помощью скалярного произведения:

$$\cos\angle(\boldsymbol{x},V)=\cos\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}.$$

Задача 13. Найти расстояние и угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством V из задач 7, 8 и 9.

Решение: В задаче 7 получили

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2 & -1\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 2\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}^T.$$

Тогда

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},V)=|\boldsymbol{z}|=\sqrt{11}.$$

Этот результат сходится с тем, что мы получили с помощью матрицы Грама в задаче 11. Кроме того,

$$\cos\angle(\boldsymbol{x},V)=\cos\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{28}{\sqrt{39}\cdot\sqrt{28}}.$$

Аналогично, в задаче 8 получили

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -3 & 4\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 5\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Тогда

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},V)=|\boldsymbol{z}|=\sqrt{14},\quad \cos\angle(\boldsymbol{x},V)=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

В задаче 9 получили

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Тогда

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},V)=|\boldsymbol{z}|=\sqrt{7},\quad \cos\angle(\boldsymbol{x},V)=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Этот результат сходится с тем, что мы получили с помощью матрицы Грама в задаче 12.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Описать явно и неявно ортогональное дополнение к подпространству $V \subset \mathbb{R}^4$, заданному однородной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 &= 0 \end{cases}$$

Ответ: $V^{\perp} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 11 & -13 \end{pmatrix}^T\}$, $\begin{cases} 29x_1 + 10x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 36x_1 + 17x_2 + 7x_4 &= 0. \end{cases}$

Задача 2. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -18 \end{pmatrix}^T$$

на подпространство

$$V = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Найти расстояние и угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством V. Вычисление расстояния проверить по формуле с матрицей Грама.

Ответ: $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V) = \sqrt{2}$, $\cos\angle(\boldsymbol{x}, V) = \sqrt{\frac{180}{181}}$.

Задача 3. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^T$$

на подпространство, заданное неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

Найти расстояние и угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством V. Вычисление расстояния проверить по формуле с матрицей Грама.

Ответ: $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V) = \sqrt{18}$, $\cos\angle(\boldsymbol{x}, V) = \frac{2}{\sqrt{22}}$.

Задача 4. Найти угол и расстояние между вектором

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 18 \end{pmatrix}^T$$

и подпространством $U \subset \mathbb{R}^4$, заданным неявно системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0. \end{cases}$$

Ответ: $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V) = 2\sqrt{70}$, $\cos\angle(\boldsymbol{x}, V) = \frac{2\sqrt{46}}{23}$.