Семинар 8. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта

§1. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта

Процедура ортогонализации Грама-Шмидта позволяет получить по заданной линейно независимой системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ с помощью следующих формул

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1, \\
\ldots \\
\boldsymbol{b}_k &= \boldsymbol{a}_k - \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k-1})}{(\boldsymbol{b}_{k-1}, \boldsymbol{b}_{k-1})}\boldsymbol{b}_{k-1}.
\end{aligned}$$

В силу этих формул достаточно очевидно, что

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}.$$

Если попытаться применить процедуру ортогонализации к линейно зависимой системе векторов, на некотором шаге получим нулевой вектор.

Если после применения процедуры ортогонализации нормировать каждый из векторов $\boldsymbol{b}_j$, получим ортонормированную систему векторов. Можно строить ортормированную систему векторов сразу по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|}, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|}, \\
\ldots \\
\boldsymbol{b}_k &= \boldsymbol{a}_k - (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - \ldots - (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_{k-1})\boldsymbol{e}_{k-1}, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{b}_k}{|\boldsymbol{b}_k|}.
\end{aligned}$$

Везде в задачах предполагается, что скалярное произведение задано стандартным образом, если прямо не указано обратное.

Задача 1. Применить процедуру ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Будем обозначать ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_i$.
1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

2) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 4, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 4.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Будем также на каждом шаге проверять правильность расчетов. Вычислим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0,$$

что подтверждает, что система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ действительно ортогональна.

3) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = 12, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 4,$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = -32, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 16.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярные произведения

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = 0,$$

что подтверждает, что система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ действительно ортогональна.

Задача 2. Применить процедуру ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Будем обозначать ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_i$.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

2) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = -10, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 10.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0,$$

что подтверждает, что система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ действительно ортогональна.

3) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = 30, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 10,$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = -26, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 26.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярные произведения

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = 0,$$

что подтверждает, что система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ действительно ортогональна.

Замечание. Перед решением следующей задачи полезно вспомнить одно из свойств определенных интегралов. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ и четная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ и нечетная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Задача 3. Применить к системе многочленов $\{1, t, t^2, t^3\}$ на отрезке $[-1, 1]$ процедуру ортогонализации Грама-Шмидта. Скалярное произведение задано следующим образом:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Решение: Обозначим

$$\boldsymbol{a}_1 = 1, \quad \boldsymbol{a}_2 = t, \quad \boldsymbol{a}_3 = t^2, \quad \boldsymbol{a}_4 = t^3.$$

Ортогональную систему многочленов будем обозначать $\boldsymbol{b}_i$.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = 1.$$

2) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} tdt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} dt = 2.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 = t.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} tdt = 0,$$

что подтверждает, что система многочленов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ действительно ортогональна.

3) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} dt = 2,$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = t^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярные произведения

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3}) dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3}) t dt = 0,$$

что подтверждает, что система многочленов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ действительно ортогональна.

4) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} dt = 2,$$

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 (t^2 - \frac{1}{3}) dt = 0.$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)$ считать не будем, поскольку та дробь, в которой он встречается, равна нулю. Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3)}{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}\boldsymbol{b}_3 = t^3 - \frac{3}{5} t.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярные произведения

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_4) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 - \frac{3}{5} t) dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 - \frac{3}{5} t) t dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 - \frac{3}{5} t)(t^2 - \frac{1}{3}) dt = 0,$$

что подтверждает, что система многочленов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$ действительно ортогональна.

Замечание. Многочлены, которые мы получили, являются приведенными *многочленами Лежандра.* Эти многочлены образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$, если скалярное произведение определять с помощью интеграла. Кроме того, они обладают другими замечательными свойствами, например, наименее уклоняются от нуля в среднем квадратичном.

Задача 4. Применить к системе многочленов $\{1, t, t^2\}$ на отрезке $[-1, 1]$ процедуру ортогонализации Грама-Шмидта. Скалярное произведение задано следующим образом:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) f(t) g(t) dt.$$

Решение: Обозначим

$$\boldsymbol{a}_1 = 1, \quad \boldsymbol{a}_2 = t^2, \quad \boldsymbol{a}_3 = t^2.$$

Ортогональную систему многочленов будем обозначать $\boldsymbol{b}_i$.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = 1.$$

2) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) t dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 = t.$$

3) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) t^2 dt = \frac{4}{15}, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) dt = \frac{4}{3},$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) t^3 dt = 0, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) t^2 dt = \frac{4}{15}.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} \boldsymbol{b}_2 = t^2 - \frac{1}{5} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{5}.$$

Правильность расчетов проверьте самостоятельно.

Напоследок решим несколько задач, которые помимо использования процедуры ортогонализации, предполагают использование того, что уже было изучено ранее.

Задача 5. Ортонормировать систему векторов из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$$

и дополнить ее до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение: Будем обозначать ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_i$. Применим процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

2) Сначала вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 10, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 10.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность расчетов. Вычислим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0,$$

что подтверждает, что система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ действительно ортогональна.

Для упрощения дальнейших расчетов возьмем

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Чтобы дополнить построенную систему до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$, сначала найдем ортогональное дополнение к пространству $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$. Для этого решим однородную систему линейных уравнений с матрицей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы равно

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По построению эти векторы перпендикулярны векторам $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$, но не перпендикулярны между собой, а потому не могут образовывать дополнение до ортогонального базиса. Но как решить эту проблему, мы уже знаем: достаточно применить процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

3) Пусть

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

4) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3) = 18, \quad (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3) = 26.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3)}{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{9}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Можно еще проверить расчеты, вычислив скалярные произведения $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_4)$, $(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4)$.

Для упрощения дальнейших расчетов возьмем

$$\boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 1 & 13 \end{pmatrix}^T.$$

Осталось только нормировать полученный базис:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3^0 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4^0 = \frac{\boldsymbol{b}_4}{|\boldsymbol{b}_4|} = \frac{1}{\sqrt{260}}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Ортонормировать систему векторов из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

и дополнить ее до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение: Будем обозначать ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_i$. Применим процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

2) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 9, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 9.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = 9, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 9,$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = 9, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 9.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ и $\boldsymbol{b}_3$ образуют ортогональную систему.

Чтобы дополнить систему до ортогонального базиса, найдем ортогональное дополнение к подпространству $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$. Для этого решим однородную систему линейных уравнений с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{III} \\ \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right).$$

ФСР этой системы образует вектор

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Вектор $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}_4$ по построению ортогонален векторам $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ и $\boldsymbol{b}_3$, а значит, система векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ и $\boldsymbol{b}_4$ ортогональна.

Осталось только нормировать полученный базис:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате ортогонализации некоторого базиса получается новый базис. Изучим вопрос, как можно находить матрицу перехода от одного базиса к другому. Для этого достаточно на каждом шаге процедуры записывать, как новые векторы выражаются через старые, с помощью формул

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}_k + \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k-1})}{(\boldsymbol{b}_{k-1}, \boldsymbol{b}_{k-1})}\boldsymbol{b}_{k-1}.$$

Задача 7. Применить процесс ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}^T.$$

Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$. Найти координаты в базисе $\boldsymbol{b}$ вектора, который в базисе $\boldsymbol{a}$ имеет координаты

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Будем обозначать ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_i$. Применим процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

1) На первом шаге получим

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Выразим $\boldsymbol{a}_1$ через $\boldsymbol{b}_1$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1.$$

2) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 25, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 25.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим $\boldsymbol{a}_2$ через векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$:

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2.$$

3) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1) = -25, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 25,$$

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2) = -25, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 25.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим $\boldsymbol{a}_3$ через векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$:

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3.$$

4) Вычислим необходимые скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1) = 25, \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 25,$$

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2) = 25, \quad (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) = 25,$$

$$(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3) = 25, \quad (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3) = 25.$$

Отсюда получим:

$$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3)}{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выразим $\boldsymbol{a}_4$ через векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$:

$$\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4.$$

Для того, чтобы записать матрицу перехода $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$, используем те формулы, которые мы получали на каждом шаге процедуры ортогонализации:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1,\\
\boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2,\\
\boldsymbol{a}_3 &= -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3,\\
\boldsymbol{a}_4 &= \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4.
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения векторов нового базиса (в данном случае это базис $\boldsymbol{a}$) в старом образуют столбцы матрицы перехода $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$. Таким образом, матрица перехода равна

$$T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в базисе $\boldsymbol{b}$ координаты вектора, который в базисе $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Из последней формулы очевидно, что

$$\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4 = -2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4.$$

Это соотношение можно использовать для проверки результата. Например, в данном случае

$$\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 3\\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 4\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\\ 5\\ 15\\ 5 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$-2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = -2\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 3\\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 7\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\ 5\\ 7\\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\\ 5\\ 15\\ 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Для проверки правильности матрицы перехода можно использовать одно из свойств матриц перехода:

$$T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 3 & 7 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Кстати, для вычисления такой матрицы достаточно применить цепочку элементарных преобразований:

$$\big(B|A\big) \sim \cdots \sim \big(E|B^{-1}A\big).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Применить процедуру ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$.

Ответ: $(1,-2,2)^T$, $(2,2,1)^T$, $(2,-1,-2)^T$, $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Применить процедуру ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T.$$

Ответ: $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}^T$. Так как $\boldsymbol{a}_3$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, его следует удалить из системы.

Задача 3. Применить к системе многочленов $\{1, t, t^2\}$ на отрезке $[0,1]$ процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, если скалярное произведение задано следующим образом: $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

Ответ: 1, $t - \frac{1}{2}$, $t^2 - t - \frac{1}{6}$.

Задача 4. Показать, что скалярное произведение для многочленов, заданных на отрезке $[0,1]$, может быть задано следующим образом: $(f,g) = \int\limits_0^1 tf(t)g(t)dt$. Применить к системе многочленов $\{1, t, t^2\}$ на отрезке $[0,1]$ процедуру ортогонализации Грама-Шмидта.

Ответ: 1, $t - \frac{2}{3}$, $t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{3}{10}$.

Задача 5. Применить процесс ортогонализации к векторам из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-3,4,1,-5)^T, \boldsymbol{a}_2 = (-6,9,3,-9)^T, \boldsymbol{a}_3 = (6,-4,-2,3)^T, \boldsymbol{a}_4 = (5,3,-13,7)^T.$$

Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$. Найти координаты в базисе $\boldsymbol{b}$ вектора, который в базисе $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Ответ: $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$, $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Ортонормировать систему векторов из $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & -7 \end{pmatrix}^T$$

и дополнить ее до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$.

Ответ: $\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_4^0 = \frac{1}{\sqrt{966}}\begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Проверить ортогональность следующей системы векторов из $\mathbb{R}^5$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$$

и дополнить ее до ортогонального базиса в $\mathbb{R}^5$.

Ответ: $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}^T$.