Семинар 9. QR-разложение

Начнем с теоретической задачи.

Задача 1. В n-мерном евклидовом пространстве даны такие векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}$, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) < 0$ при $i \neq j$. Доказать, что любые n векторов образуют базис в этом пространстве.

Решение: Докажем, например, что $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ образуют базис. Для этого применим к этой системе векторов процедуру ортогонализации Грама-Шмидта. Если бы система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ была линейно зависима (т.е. не могла бы образовывать базис), то на некотором шаге полученный вектор стал бы нулевым. Докажем, что этого не случится.

Пусть последовательно получаем, что векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{k-1}$, которые получаются в результате ортогонализации, ненулевые. Докажем, что $\boldsymbol{f}_k \neq 0$. Одновременно с построением ортогональной системы будем строить матрицу перехода $T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{f}}$. Элементы этой матрицы обозначим T_{ij}.

1) На первом шаге получаем $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $T_{11} = 1 > 0$.

2) На втором шаге имеем

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{e}_1.$$

Числитель дроби $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) < 0$ (по условию), знаменатель $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) > 0$ (в силу свойств скалярного произведения). Поэтому

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + k_1 \boldsymbol{e}_1,$$

где $k_1 > 0$. Поэтому

$$T_{12} = k_1 > 0, \quad T_{22} = 1 > 0.$$

3) На третьем шаге получим

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_3 - \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{f}_1 - \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{f}_2)}{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_3 - \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{e}_1 - \frac{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + k_1 \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} (\boldsymbol{e}_2 + k_1 \boldsymbol{e}_1).$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) < 0$, а также

$$(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + k_1 \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + k_1 (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) < 0,$$

поскольку каждое слагаемое этого скалярного произведения меньше нуля. Это слагаемое умножается на линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с положительными коэффициентами. А потому можно записать, что

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_3 + m_1 \boldsymbol{e}_1 + m_2 \boldsymbol{e}_2, \quad m_1 > 0, \, m_2 > 0.$$

Таким образом,

$$T_{13} = m_1 > 0, \quad T_{23} = m_2 > 0, \quad T_{33} = 1 > 0.$$

Заполняя матрицу T_{ij} по столбцам, мы получаем, что все элементы этой верхнетреугольной матрицы положительны. На очередном, k-м шаге имеем

$$\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{e}_k - \frac{(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} \boldsymbol{f}_1 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_{k-1})}{(\boldsymbol{f}_{k-1}, \boldsymbol{f}_{k-1})} \boldsymbol{f}_{k-1}.$$

Векторы $\boldsymbol{f}_j$, где $j = \overline{1, k-1}$ представляют собой линейные комбинации векторов $\boldsymbol{e}_j$ с положительными коэффициентами, а значит, любое скалярное произведение вида

$$(\boldsymbol{e}_k, r_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + r_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1}) = r_1(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_1) + \ldots + r_{k-1}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k-1})$$

будет меньше нуля в силу свойства $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) < 0$ и положительности коэффициентов этой линейной комбинации. Это значит, что

$$\boldsymbol{f}_k = c_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1} + \boldsymbol{e}_k, \quad c_i > 0,\, i = \overline{1, k-1}.$$

Теперь докажем, что $\boldsymbol{f}_k \neq 0$. Для этого последнее равенство умножим скалярно на $\boldsymbol{e}_{n+1}$:

$$(\boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{e}_{n+1}) = c_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{n+1}) + \ldots + c_{k-1}(\boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{e}_{n+1}) + (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{n+1}).$$

Каждое слагаемое этой суммы будет меньше нуля в силу свойства $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) < 0$, а значит, и вся сумма строго меньше нуля:

$$(\boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{e}_{n+1}) < 0,$$

что возможно только при $\boldsymbol{f}_k \neq 0$. Это значит, что на очередном шаге процедуры ортогонализации получаем ненулевой вектор, то есть система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ линейно независима.

Продолжая процедуру до последнего вектора $\boldsymbol{e}_n$, получаем, что рассматриваемая система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независима, а значит, образует базис.

§1. QR-разложение

Согласно теореме о QR-разложении, любая матрица A с действительными элементами может быть представлена в виде произведения матриц

$$A = QR,$$

где Q — ортогональная матрица, R — верхнетреугольная матрица. При этом матрица Q содержит координаты ортонормированного базиса, полученного из базиса $\boldsymbol{a}$, записанного в матрице A по столбцам, с помощью процедуры ортогонализации Грама-Шмидта с последующим нормированием ортогональных векторов, а матрица R является матрицей перехода от нового ортонормированного базиса $\boldsymbol{b}$ к старому базису $\boldsymbol{a}$: $R = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}$. Таким образом, теорема о QR-разложении является следствием процедуры ортогонализации и давно знакомой формулы:

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}.$$

Задача 2. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение: Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, одновременно выражая векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1.$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = -3\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2.$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 + 8\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = -8\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3.$$

Нормируем векторы $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{b}_1 = \sqrt{3}\boldsymbol{b}_1^0, \quad \boldsymbol{b}_2 = \sqrt{14}\boldsymbol{b}_2^0, \quad \boldsymbol{b}_3 = \sqrt{42}\boldsymbol{b}_3^0.$$

Подставив последние выражения в формулы, выражающие векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1 = \sqrt{3}\boldsymbol{b}_1^0, \\ \boldsymbol{a}_2 &= -3\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = -3\sqrt{3}\boldsymbol{b}_1^0 + \sqrt{14}\boldsymbol{b}_2^0, \\ \boldsymbol{a}_3 &= -8\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = -8\sqrt{3}\boldsymbol{b}_1^0 + 2\sqrt{14}\boldsymbol{b}_2^0 + \sqrt{42}\boldsymbol{b}_3^0. \end{aligned}$$

Осталось составить матрицы Q и R. В матрицу Q по столбцам записываем координаты полученной ортономированной системы, то есть координаты векторов $\boldsymbol{b}_j^0$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{14} & 5/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{3} & 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} \end{pmatrix}.$$

Матрица R равна матрице перехода от базиса $\boldsymbol{b}^0$ к базису $\boldsymbol{a}$, то есть она содержит коэффициенты разложения векторов $\boldsymbol{a}$ через $\boldsymbol{b}^0$, записанные по столбцам:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -8\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{14} & 2\sqrt{14} \\ 0 & 0 & \sqrt{42} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для проверки достаточно вычислить произведение матриц $A = QR$.

Задача 3. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним процедуру ортогонализации, одновременно выражая векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1.$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2.$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Для удобства будем считать, что на очередном шаге процедуры ортогонализации мы нашли не вектор $\boldsymbol{b}_3$, а вектор $2\boldsymbol{b}_3$, тогда

$$2\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3.$$

Нормируем векторы $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{b}_1^0, \quad \boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{b}_2^0, \quad \boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_3^0.$$

Подставив последние выражения в формулы, выражающие векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{b}_1^0, \\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{b}_1^0 + 3\boldsymbol{b}_2^0, \\ \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_1^0 - 3\boldsymbol{b}_2^0 + 6\boldsymbol{b}_3^0. \end{aligned}$$

В матрицу Q записываем координаты векторов $\boldsymbol{b}_j^0$:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица R равна матрице перехода от базиса $\boldsymbol{b}^0$ к базису $\boldsymbol{a}$:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для проверки достаточно вычислить произведение матриц

$$QR = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

Задача 4. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, одновременно выражая векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1.$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2,$$

где

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ добавили для удобства. Продолжим:

$$\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 - \frac{1}{6}\boldsymbol{b}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{6}\boldsymbol{b}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_3,$$

где

$$\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

коэффициент $\frac{2}{3}$ добавили для удобства.

Нормируем векторы $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{b}_1 = \sqrt{2}\boldsymbol{b}_1^0, \quad \boldsymbol{b}_2 = \sqrt{6}\boldsymbol{b}_2^0, \quad \boldsymbol{b}_3 = \sqrt{3}\boldsymbol{b}_3^0.$$

Подставив последние выражения в формулы, выражающие векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1 = \sqrt{2}\boldsymbol{b}_1^0, \\ \boldsymbol{a}_2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}_1^0 + \frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{b}_2^0, \\ \boldsymbol{a}_3 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{6}\boldsymbol{b}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}_1^0 + \frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{b}_2^0 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{b}_3^0. \end{aligned}$$

В матрицу Q записываем координаты векторов $\boldsymbol{b}_j^0$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица R равна матрице перехода от базиса $\boldsymbol{b}^0$ к базису $\boldsymbol{a}$:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Добавление коэффициентов перед векторами $\boldsymbol{b}_i$, конечно, не является обязательным. Например, в задаче 4 можно было считать, что

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Это повлияло бы на дальнейшие расчеты, но после нормировки вектор $\boldsymbol{b}_2^0$ в любом случае стал бы равен

$$\boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

§2. Геометрический смысл коэффициентов процедуры ортогонализации

Выражение $\dfrac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ равно векторной ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$. В самом деле, пусть

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{z},$$

где $\lambda \boldsymbol{a}$ — проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на подпространство, порожденное вектором $\boldsymbol{a}$ (по сути, на прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$), $\boldsymbol{z}$ — ортогональная составляющая при этом проецировании. Умножим это уравнение скалярно на $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Этот факт позволяет получить, например, формулы для вектора, симметричного заданному вектору относительно некоторой плоскости или прямой.

Вектор, симметричный заданному вектору относительно плоскости. Пусть нормальный вектор плоскости π равен $\boldsymbol{n}$. Если из вектора $\boldsymbol{a}$ вычесть удвоенный вектор проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$, получим вектор $\boldsymbol{d}$, симметричный $\boldsymbol{a}$ относительно плоскости π, то есть

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \qquad (1)$$

Вектор, симметричный заданному вектору относительно прямой. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{l}$ определяется формулой

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l},$$

а ортогональная составляющая при таком проецировании равна

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l}.$$

Если из вектора $\boldsymbol{a}$ вычесть умноженный на 2 вектор ортогональной составляющей $\boldsymbol{z}$, получим вектор, симметричный $\boldsymbol{a}$ относительно оси $\boldsymbol{l}$, то есть

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - 2\left(\boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l}\right) = 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}. \tag{2}$$

Задача 5. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ получается из базиса $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ симметрией относительно плоскости

$$x - 2y = 0.$$

Найти матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Решение: С помощью формулы (1) найдем, в какие векторы переходят векторы базиса $\mathcal{E}$. При этом нормальный вектор плоскости равен $\boldsymbol{n} = \left(1, -2, 0\right)^T$. Получим:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{i} - 2\frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{j} - 2\frac{(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{k} - 2\frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 0}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $R = \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ получается из базиса $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ симметрией относительно плоскости

$$x - y + z = 0.$$

Найти матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Ответ: $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ получается из базиса $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ симметрией относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Ответ: $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Базис $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ получается из базиса $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ симметрией относительно плоскости

$$2x + y + 3z = 0.$$

Найти матрицу перехода $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$, если векторы $\boldsymbol{a}_i$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.