Семинар 10. Билинейные функции

§1. Билинейные функции (формы) в линейном пространстве

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. *Билинейной функцией (формой)* называется отображение $f\colon \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathbb{F}$, которое линейно по каждому аргументу, то есть
1) $f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\beta f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$,
2) $f(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z})=\alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$,
где $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathcal{L}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$.

Всякая билинейная форма однозначно определяется своими значениями на паре базисных векторов $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j$. Эти значения принято записывать в матрицу

$$B=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & \dots & f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n)\\ f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) & \dots & f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_2) & \dots & f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix},$$

которую называют *матрицей билинейной формы* f в базисе $\mathcal{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$. Значение билинейной формы на паре произвольных векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{L}$ в этом случае можно найти по формуле

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{y},$$

то есть

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j,k=1}^{n}b_{jk}x_jy_k.$$

Билинейная функция называется *симметричной*, если

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\quad\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{L},$$

и *кососимметричной*, если

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\quad\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{L}.$$

Для конечномерного пространства симметричность или кососимметричность можно определить с помощью вида матрицы билинейной формы.

Задача 1. Установить, является ли это отображение билинейной формой. Если да, найти матрицу и установить, является ли эта билинейная форма симметричной или кососимметричной.

- $x,y\in\mathbb{F}^n,\ f(x,y)=x^Ty$ $\big($Да, $B=E$, симметрична$\big)$.
- $x,y\in\mathbb{F}^n,\ f(x,y)=xy^T$ $\big($Нет$\big)$.
- $A,B\in M_n(\mathbb{R}),\ f(A,B)=\operatorname{tr}(AB)$ $\big($Да, симметрична, $\operatorname{tr}(AB)=\sum\limits_{j,i}b_{ji}a_{ij}\big)$.
- $x,y\in\mathbb{C},\ f(x,y)=|x\cdot y|$ $\big($Нет$\big)$.
- $x,y\in\mathbb{C},\ f(x,y)=\operatorname{Re}(x\cdot y)$ $\Big($Да, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Big)$.
- $x,y\in\mathbb{C},\ f(x,y)=\operatorname{Re}(x\cdot\bar{y})$ $\big($Да, $B=E$, симметрична$\big)$.
- $x,y\in C_{[a,b]},\ f(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ $\big($Да, симметрична$\big)$.

- $x, y \in C_{[a,b]}$, причем $x(a) = x(b) = y(a) = y(b) = 0$, $f(x, y) = \int\limits_a^b x(t)y'(t)dt$ (Да, кососимметрична).
- $x, y \in C_{[a,b]}$, $f(x, y) = \int\limits_a^b \big(x(t) + y(t)\big)^2 dt$ (Нет).

Задача 2. Пусть билинейная форма задана в некотором базисе пространства $\mathbb{R}^2$ своей матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, если

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Решение: Воспользуемся матричной формулой расчета значения билинейной формы:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -14.$$

Задача 3. Пусть билинейная форма в некотором базисе задана в виде

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Записать матрицу билинейной формы в этом базисе.

Решение: В этом базисе для пары векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Поэтому

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1\big|_{x_1=1,\, x_2=0,\, y_1=0,\, y_2=1} = 2.$$

Аналогично можно вычислить значения и на других парах базисных векторов. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \\ f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Как меняется билинейная форма при замене базиса?

При замене базиса матрица билинейной формы меняется по закону

$$A' = U^T A U,$$

где $U = T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{e}'}$ — матрица перехода из базиса $\boldsymbol{e}$ в базис $\boldsymbol{e}'$, A — матрица билинейной формы в базисе $\boldsymbol{e}$, A' — матрица билинейной формы в базисе $\boldsymbol{e}'$.

Билинейные формы называются *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой заменой базиса. При этом, если матрица билинейной формы в одном базисе вырождена, то и в другом базисе она будет вырождена. То же верно и для свойств симметричности и кососимметричности.

Задача 4. В $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе билинейная форма задается выражением

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1.$$

Найти ее выражение в базисе

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Решение: Матрица билинейной формы в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода в базис $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ равна

$$U = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

транспонированная к ней равна

$$U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ матрица билинейной формы равна

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные формы над $\mathbb{R}$, заданные следующими выражениями:

$$f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1, \quad f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1.$$

Решение: Матрицы билинейных форм f_1 и f_2 соответственно равны

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица A_1 кососимметрична, а матрица A_2 — нет. Значит, формы не эквивалентны.

Задача 6. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные формы над $\mathbb{C}$, заданные следующими выражениями:

$$f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + ix_1y_2, \quad f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + (1+i)\cdot x_1y_2 + (1-i)\cdot x_2y_1 - i\cdot x_2y_2.$$

Решение: Матрицы билинейных форм f_1 и f_2 соответственно равны

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -i \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица A_1 вырождена, а матрица A_2 — нет, поскольку $\det A_2 = -2i - 2$.

§3. Квадратичные формы

Квадратичной функцией (формой), порожденной симметричной билинейной формой $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ называется функция

$$q(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Если

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j,$$

то

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} x_j^2 = 2 \sum_{j<k} b_{jk} x_j x_k.$$

Для квадратичных форм так же можно записать матрицу, причем она обязательно будет симметричной. *Матрицей* квадратичной формы

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{j<k} b_{jk} x_j x_k$$

называется симметричная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для матриц квадратичных форм остается верным закон преобразования матрицы к новым координатам:

$$A' = U^T A U,$$

где $U = T_{\boldsymbol{e} \to \boldsymbol{e}'}$ — матрица перехода из базиса $\boldsymbol{e}$ в базис $\boldsymbol{e}'$, A — матрица квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}$, A' — матрица этой формы в базисе $\boldsymbol{e}'$.

Задача 7. Квадратичную форму

$$A(\boldsymbol{x}) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

преобразовать к новым координатам

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \quad x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3.$$

Решение: Матрица квадратичной формы равна

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода к новому базису равна

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

По формуле пересчета матрицы квадратичной формы при замене базиса получим

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в новых координатах квадратичная форма имеет вид

$$A(\boldsymbol{y}) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2.$$

Каноническим видом квадратичной формы называют выражение

$$Q(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 - \lambda_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - \lambda_n y_n^2,$$

где все $\lambda_i > 0$. В этом случае число

$$r_+ = k$$

называется *положительным индексом инерции*, а $r_- = n - k$ *отрицательным индексом инерции*. Таким образом, положительный (отрицательный) индекс инерции определяется как число положительных (отрицательных) слагаемых в каноническом виде квадратичной формы. *Рангом* $\mathrm{Rg}(Q)$ квадратичной формы в каноническом виде называется число ее ненулевых слагаемых. Числа $r_+(Q)$, $r_-(Q)$, $\mathrm{Rg}(Q)$ являются инвариантами квадратичной формы, то есть не зависят от выбора базиса. Для нахождения индексов инерции квадратичной формы, заданной не в каноническом виде, стоит сделать замену базиса и привести квадратичную форму к каноническому виду.

Задача 8. Найти индексы инерции и ранг квадратичной формы $Q(\boldsymbol{x}) = 4x_1x_2$.
Решение: Можно заметить, что

$$4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1^2 - y_2^2,$$

где

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2.$$

Тогда $r_+ = r_- = 1$.

§4. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к нормальному виду

Нормальным видом квадратичной формы называется

$$Q(y) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_n^2.$$

Для приведения матрицы квадратичной формы к нормальному виду можно использовать *метод Лагранжа*, который заключается в последовательном выделении полных квадратов. Обозначим за B матрицу квадратичной формы. Пусть, например, $b_{11} \neq 0$. Тогда рассматриваем все слагаемые, содержащие x_1:

$$\sigma_1 = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{1n}x_1x_n + r(x_2, \ldots, x_n),$$

и выделяем полный квадрат в σ_1:

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 - \gamma + r(x_2, \ldots, x_n).$$

Обозначаем $y_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n$. Тогда квадратичная форма примет вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}}(y_1)^2 - \gamma + +r(x_2, \ldots, x_n),$$

причем γ не содержит слагаемых с x_1. В этом выражении тоже выделяем полный квадрат и повторяем процедуру до тех пор, пока не придем к каноническому виду. При этом переменные x_i последовательно исключаются из квадратичной формы.

Если $b_{11} = 0$, но $b_{kk} \neq 0$ для некоторого k, можно рассмотреть слагаемые, содержащие x_k. При этом переменные квадратичной формы последовательно исключаются из рассмотрения.

Если на очередном шаге получается квадратичная форма, которая не содержит полных квадратов, но содержит слагаемое $x_j x_k$ для некоторых j, k, можно сделать замену

$$x_j = x'_j + x'_k, \quad x_k = x'_j - x'_k,$$

после чего квадратичная форма будет содержать квадраты некоторых переменных.

В следующих задачах приведем квадратичные формы к сумме квадратов методом Лагранжа, определим ее индексы инерции и ранг.

Задача 9. $Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

Решение: Поскольку квадратичная форма содержит квадрат переменной x_1, исключим ее из записи квадратичной формы. Для этого сначала соберем все слагаемые, содержащие x_1:

$$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = \big(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3\big) + 5x_2^2 - 4x_3^2.$$

Дополним выражение в скобках до полного квадрата:

$$\big(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3\big) + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$$

$$= \big(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \underline{+ x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3}\big) \underline{- x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3} + 5x_2^2 - 4x_3^2.$$

Внутри скобки выделим полный квадрат, а вне ее — приведем подобные слагаемые:

$$\big(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \underline{+ x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3}\big) \underline{- x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3} + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2.$$

Переменную x_1 исключили. Теперь исключим из записи переменную x_2. Для этого в выражении вне первой скобки соберем все слагаемые квадратичной формы, содержащие переменную x_2 и дополним выражение до полного квадрата:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2^2 + x_2x_3\big) - 8x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2^2 + x_2x_3 + \underline{\frac{x_3^2}{4}}\big) - \underline{x_3^2} - 8x_3^2.$$

Во второй скобке выделим полный квадрат, вне скобки приведем подобные слагаемые:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2^2 + x_2x_3 + \underline{\frac{x_3^2}{4}}\big) - \underline{x_3^2} - 8x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2 + \frac{x_3}{2}\big)^2 - 9x_3^2.$$

Замена

$$y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \quad y_2 = x_2 + \frac{x_3}{2}, \quad y_3 = x_3$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2 + \frac{x_3}{2}\big)^2 - 9x_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2.$$

Канонический вид содержит 3 слагаемых, поэтому

$$\mathrm{Rg}(Q) = 3.$$

Из трех слагаемых канонического вида квадратичной формы два с положительными коэффициентами, а одно — с отрицательным, поэтому

$$r_+(Q) = 2, \quad r_-(Q) = 1.$$

Замечание. Замена

$$y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \quad y_2 = 2\big(x_2 + \frac{x_3}{2}\big) = 2x_2 + x_3, \quad y_3 = 3x_3$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\big(x_2 + \frac{x_3}{2}\big)^2 - 9x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Задача 10. $Q(\boldsymbol{x}) = x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Решение: Поскольку квадратичная форма не содержит квадрат переменной x_1, но зато содержит квадрат x_2, исключим переменную x_2 из записи квадратичной формы. Для этого сначала соберем все слагаемые, содержащие x_2:

$$x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = \big(x_2^2 + 2x_2x_3\big) + 4x_1x_3$$

и дополним до полного квадрата

$$\big(x_2^2 + 2x_2x_3\big) + 4x_1x_3 = \big(x_2^2 + 2x_2x_3\underline{+x_3^2}\big)\underline{-x_3^2} + 4x_1x_3 = \big(x_2 + x_3\big)^2 - x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Переменную x_2 исключили. Теперь исключим из записи переменную x_3, поскольку квадратичная форма содержит квадрат этой переменной. Для этого в выражении вне первой скобки соберем все слагаемые квадратичной формы, содержащие переменную x_3 и дополним выражение до полного квадрата:

$$\big(x_2 + x_3\big)^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 = \big(x_2 + x_3\big)^2 - \big(x_3^2 - 4x_1x_3\big) = \big(x_2 + x_3\big)^2 - \big(x_3^2 - 4x_1x_3\underline{+4x_1^2}\big)\underline{+4x_1^2} =$$

$$= \big(x_2 + x_3\big)^2 - \big(x_3^2 - 2x_1\big)^2 + 4x_1^2 = \big(x_2 + x_3\big)^2 - \big(x_3 - 2x_1\big)^2 + \big(2x_1\big)^2.$$

Замена

$$y_1 = x_2 + x_3, \quad y_2 = x_3 - 2x_1, \quad y_3 = 2x_1$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду:

$$\big(x_2 + x_3\big)^2 - \big(x_3 - 2x_1\big)^2 + \big(2x_1\big)^2 = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Нормальный вид содержит 3 слагаемых, поэтому

$$\mathrm{Rg}(Q) = 3.$$

Из трех слагаемых нормального вида квадратичной формы два с положительными коэффициентами, а одно — с отрицательным, поэтому

$$r_+(Q) = 2, \quad r_-(Q) = 1.$$

Задача 11. $Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Решение: Поскольку квадратичная форма содержит квадрат переменной x_1, исключим ее из записи квадратичной формы. Для этого сначала соберем все слагаемые, содержащие x_1 и выделим полный квадрат:

$$x_1^2{+}2x_1x_2{+}4x_1x_3{+}8x_2x_3 = \big(x_1^2{+}2x_1x_2{+}4x_1x_3\big){+}8x_2x_3 = \big(x_1^2{+}2x_1x_2{+}4x_1x_3\underline{+x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3}\big) -$$

$$\underline{-x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3} + 8x_2x_3 = \big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Теперь исключим переменную x_2 из записи. Соберем все слагаемые, содержащие x_2 и выделим полный квадрат:

$$\big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 = \big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3) - 4x_3^2 =$$

$$= \big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - \big(x_2^2 - 4x_2x_3 \underline{+4x_3^2}\big)\underline{+4x_3^2} - 4x_3^2 = \big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - \big(x_2 - 2x_3\big)^2.$$

Замена

$$y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad y_2 = x_2 - 2x_3$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду:

$$\big(x_1 + x_2 + 2x_3\big)^2 - \big(x_2 - 2x_3\big)^2 = y_1^2 - y_2^2.$$

Нормальный вид содержит 2 слагаемых, поэтому

$$\mathrm{Rg}(Q) = 2.$$

Из двух слагаемых нормального вида квадратичной формы одно с положительным коэффициентом, а одно — с отрицательным, поэтому

$$r_+(Q) = 1, \quad r_-(Q) = 1.$$

Задача 12. $Q(\boldsymbol{x}) = 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_2$.

Решение: Квадратичная форма содержит квадраты переменных x_2 и x_3, однако перед x_3^2 коэффициент равен одному, а потому выделять полный квадрат легче. Поэтому соберем все слагаемые, содержащие x_3 и выделим полный квадрат:

$$4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_2 = \big(x_3^2 + 4x_2x_3\big) + 4x_2^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= \big(x_3^2 + 4x_2x_3 \underline{+4x_2^2}\big)\underline{-4x_2^2} + 4x_2^2 - 2x_1x_2 = \big(x_3 + 2x_2\big)^2 - 2x_1x_2.$$

На этом шаге получилось, что полных квадратов нет, но есть смешанное произведение x_1x_2. Что ж, сделаем замену

$$x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_1' - x_2'.$$

В результате замены получим

$$\big(x_3 + 2x_2\big)^2 - 2x_1x_2 = \big(x_3 + 2x_2\big)^2 - 2\big((x_1')^2 - (x_2')^2\big) = \big(x_3 + 2x_2\big)^2 - \big(\sqrt{2}x_1'\big)^2 + \big(\sqrt{2}x_2'\big)^2.$$

Таким образом, замена

$$y_1 = x_3 + 2x_2, \quad y_2 = \sqrt{2}x_1', \quad y_3 = \sqrt{2}x_2'$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду:

$$\big(x_3 + 2x_2\big)^2 - \big(\sqrt{2}x_1'\big)^2 + \big(\sqrt{2}x_2'\big)^2 = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Однако замену в таком виде оставлять нельзя, поскольку переменные y_i должны быть выражены только через x_i. Из формул для x_1, x_2 получим

$$x_1' = \frac{1}{2}\big(x_1 + x_2\big), \quad x_2' = \frac{1}{2}\big(x_1 - x_2\big),$$

а значит, итоговая замена имеет вид

$$y_1 = x_3 + 2x_2, \quad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x_1 + x_2\big), \quad y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x_1 - x_2\big).$$

Нормальный вид квадратичной формы позволяет найти индексы инерции и ранг:

$$\mathrm{Rg}(Q) = 3, \quad r_+(Q) = 2, \quad r_-(Q) = 1.$$

Задача 13. $Q(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_1x_3$.

Решение: Квадратичная форма не содержит квадраты каких-либо переменных, но содержит смешанное произведение x_1x_2, а потому сделаем замену:

$$x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$Q(\boldsymbol{x}) = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 5\tilde{x}_1x_3 - 3\tilde{x}_2x_3.$$

Соберем все слагаемые, содержащие $\tilde{x}_1$ и выделим полный квадрат:

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 5\tilde{x}_1x_3 - 3\tilde{x}_2x_3 = \big(\tilde{x}_1^2 + 5\tilde{x}_1x_3\big) - \tilde{x}_2^2 - 3\tilde{x}_2x_3 =$$

$$= \big(\tilde{x}_1^2 + 5\tilde{x}_1x_3 \underline{+\frac{25}{4}x_3^2}\big)\underline{-\frac{25}{4}x_3^2} - \tilde{x}_2^2 - 3\tilde{x}_2x_3 = \big(\tilde{x}_1 + \frac{5}{2}x_3\big)^2 - \tilde{x}_2^2 - 3\tilde{x}_2x_3 - \frac{25}{4}x_3^2.$$

Теперь выделим полный квадрат по переменной x_2:

$$\big(\tilde{x}_1 + \frac{5}{2}x_3\big)^2 - \tilde{x}_2^2 - 3\tilde{x}_2x_3 - \frac{25}{4}x_3^2 = \big(\tilde{x}_1 + \frac{5}{2}x_3\big)^2 - \big(\tilde{x}_2^2 + 3\tilde{x}_2x_3 \underline{+\frac{9}{4}x_3^2}\big)\underline{+\frac{9}{4}x_3^2} - \frac{25}{4}x_3^2 =$$

$$= \big(\tilde{x}_1 + \frac{5}{2}x_3\big)^2 - \big(\tilde{x}_2 + \frac{3}{2}x_3\big)^2 - \big(2x_3\big)^2.$$

Таким образом, замена

$$y_1 = \tilde{x}_1 + \frac{5}{2}x_3, \quad y_2 = \tilde{x}_2 + \frac{3}{2}x_3, \quad y_3 = 2x_3,$$

или, если выразить $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ через первоначальные переменные

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3, \quad y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3, \quad y_3 = 2x_3,$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду:

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Нормальный вид квадратичной формы позволяет найти индексы инерции и ранг:

$$\mathrm{Rg}(Q) = 3, \quad r_+(Q) = 1, \quad r_-(Q) = 2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные формы над $\mathbb{R}$, заданные следующими выражениями:

$$f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_2 + x_3y_1 + 5x_3y_3,$$

$$f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Ответ: Нет.

Задача 2. Привести квадратичную форму

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3$$

к сумме квадратов методом Лагранжа. Указать линейное преобразование, приводящее к нормальному виду, индексы инерции и ранг.

Ответ: $(x_1 + 2x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$.

Задача 3. Привести квадратичную форму

$$Q(\boldsymbol{x}) = -x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

к сумме квадратов методом Лагранжа. Указать линейное преобразование, приводящее к нормальному виду, индексы инерции и ранг.

Ответ: $-(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3)^2 + (\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2})^2 + x_3^2$.

Задача 4. Привести квадратичную форму

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4$$

к сумме квадратов методом Лагранжа. Указать линейное преобразование, приводящее к нормальному виду, индексы инерции и ранг.

Ответ: $(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3 + 3x_4)^2 - (x_3 - 6x_4)^2 + 27x_4^2$.