

# Семинар 11. Исследование квадратичных форм с помощью матриц

Начнем с двух теоретических задач.

**Задача 1.** Найти положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы  $\text{tr}(X^2)$  на пространстве  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Решение:** Если  $X \in M_n(\mathbb{R})$ , то квадратичная форма  $\text{tr}(X^2)$  будет содержать квадраты всех переменных  $x_{kk}$ , то есть элементов главной диагонали матрицы  $X$ , а также все возможные смешанные произведения вида  $x_{kj}x_{jk}$ , то есть

$$\text{tr}(X^2) = \sum_{k=1}^n x_{kk}^2 + 2 \sum_{k < j} x_{jk}x_{kj}.$$

В этом достаточно убедиться с помощью нахождения  $\text{tr}(X^2)$  для матрицы  $2 \times 2$ :

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} & x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} \\ x_{11}x_{21} + x_{22}x_{21} & x_{12}x_{21} + x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма  $\text{tr}(X^2)$  в общем случае зависит от  $n^2$  переменных. Первая часть этой суммы

$$\sum_{k=1}^n x_{kk}^2$$

дает  $n$  положительных коэффициентов канонического вида этой формы. Каждое слагаемое вида  $2x_{jk}x_{kj}$  может быть записано в виде

$$2x_{jk}x_{kj} = \frac{1}{2}((x_{kj} + x_{jk})^2 - (x_{kj} - x_{jk})^2),$$

а значит, квадратичная форма

$$2 \sum_{k < j} x_{jk}x_{kj}$$

заменой

$$x_{kj} + x_{jk} = x'_{jk}, \quad x_{kj} - x_{jk} = x'_{kj}$$

может быть приведена к каноническому виду. Таким образом, каждое слагаемое вида  $x_{kj}x_{jk}$  в записи квадратичной формы  $\text{tr}(X^2)$  дает каноническому виду одно слагаемое с положительным коэффициентом и одно слагаемое с отрицательным коэффициентом.

Осталось посчитать суммарное число слагаемых вида  $2x_{jk}x_{kj}$  при  $k < j$ . На самом деле, количество слагаемых такого вида равно количеству элементов  $x_{kj}$  (или  $x_{jk}$ ) матрицы  $X$  при  $k < j$ . Количество подобных элементов в первой строке матрицы  $X$  равно  $n - 1$  (все элементы первой строки имеют такой вид, за исключением  $x_{11}$ ), во второй строке —  $n - 2$ : это все элементы второй строки, за исключением  $x_{21}$  и  $x_{22}$ . И вообще, количество элементов вида  $x_{kj}$  в  $k$ -ой строке равно  $n - k$ . В последней строке таких элементов не будет.

Числа  $n - 1, n - 2, \dots, 1$  образуют убывающую арифметическую прогрессию, сумма элементов которой равна

$$S = \frac{1 + (n - 1)}{2} \cdot (n - 1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Отрицательный индекс инерции равен количеству элементов вида  $x_{kj}x_{jk}$ , то есть

$$r_- = S = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

а положительный индекс инерции — количеству слагаемых вида  $x_{kj}x_{jk}$  и количеству элементов на главной диагонали матрицы  $X$ , то есть

$$r_+ = r_- + n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

**Задача 2.** Доказать, что не существует невырожденной линейной замены переменных с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_5$ , для которой  $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2$  переходит в  $Q(\mathbf{y}) = y_1^2 + 4y_2^2$ .

**Решение:** Попробуем найти такую замену. Пусть

$$x_1 = ay_1 + by_2, \quad x_2 = cy_1 + dy_2.$$

Тогда  $Q(\mathbf{y})$  имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y}) &= x_1^2 + 3x_2^2 = (ay_1 + by_2)^2 + 3 \cdot (cy_1 + dy_2)^2 = \\ &= a^2y_1^2 + 2aby_1y_2 + b^2y_2^2 + 3(c^2y_1^2 + 2cdy_1y_2 + d^2y_2^2) = \\ &= (a^2 + 3c^2)y_1^2 + (2ab + 6cd)y_1y_2 + (b^2 + 3d^2)y_2^2 = y_1^2 + 4y_2^2. \end{aligned}$$

Уравнивая коэффициенты перед различными слагаемыми  $Q(\mathbf{y})$ , получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов линейной замены<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} a^2 + 3c^2 &= 1, \\ 2ab + 6cd &= 0, \\ b^2 + 3d^2 &= 4. \end{cases}$$

Докажем, что полученная система не имеет решений в  $\mathbb{Z}_5$ . Сложив все уравнения полученной системы, получим

$$(a + b)^2 + 3(c + d)^2 = 0.$$

Квадрат числа в  $\mathbb{Z}_5$  может принимать значения 0, 1 или 4:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 4, \quad 4^2 = 1,$$

а значит, слагаемое  $(a + b)^2$  принимает значения 0, 1 или 4. Аналогично, слагаемое  $3(c + d)^2$  принимает значения 0, 3 или 2. Значит, выражение  $(a + b)^2 + 3(c + d)^2$  может быть равно нулю только в одном случае:

$$\begin{cases} a + b &= 0, \\ c + d &= 0. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} a &= 4b, \\ d &= 4c. \end{cases}$$

Подставим эти  $b$  и  $d$  во второе уравнение системы:

$$2ab + 6cd = 3a^2 + 4c^2 = 3(a^2 + 3c^2) = 0,$$

<sup>1</sup>Да, я знаю, что числа 6 нет в  $\mathbb{Z}_5$ , но оставила слагаемое  $6cd$  в таком виде для удобства.

но полученное выражение противоречит первому уравнению системы, а значит, система не имеет решений.

Это означает, что не существует такой линейной замены с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_5$ , которая переводила бы  $Q(\mathbf{x})$  в  $Q(\mathbf{y})$ .

## §1. Критерий Сильвестра

Пусть  $\mathcal{L}$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  в пространстве  $\mathcal{L}$  называется

- *положительно определенной*, если  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  выполняется неравенство  $Q(\mathbf{x}) > 0$ ,
- *отрицательно определенной*, если  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  выполняется неравенство  $Q(\mathbf{x}) < 0$ ,
- *положительно полуопределенной*, если  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  выполняется неравенство  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ ,
- *отрицательно полуопределенной*, если  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  выполняется неравенство  $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ .

Квадратичная форма называется *неопределенной*, если она не является положительно или отрицательно определенной.

Пусть  $B$  — матрица квадратичной формы  $Q(\mathbf{x})$ . Определим *угловые (главные) миноры* квадратичной формы:

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(B).$$

Согласно *критерию Сильвестра*, если все угловые миноры матрицы  $B$  положительны, то квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  положительно определена. Если для всех главных миноров выполнено соотношение

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

то квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  отрицательно определена. Последнее соотношение означает, что знаки угловых миноров должны чередоваться, начиная со знака минус.

В следующих задачах будем исследовать квадратичные формы на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

**Задача 3.**  $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2$ .

**Решение:** Матрица такой квадратичной формы равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Все угловые миноры положительны, а значит, по критерию Сильвестра квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  положительно определена.

**Задача 4.**  $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ .

**Решение:** Матрица такой квадратичной формы равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -19 < 0.$$

Дальше считать нет смысла, поскольку не выполнено ни одно из условий: ни для положительной определенности, ни для отрицательной определенности.

**Задача 5.**  $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2$ .

**Решение:** Матрица такой квадратичной формы равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Поскольку  $\Delta_1 = 0$ , по критерию Сильвестра нельзя установить знакоопределенность квадратичной формы.

## §2. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть  $B$  — матрица квадратичной формы  $q(\mathbf{x})$ . Метод Якоби приведения матрицы квадратичной формы к каноническому виду тоже требует вычисления угловых (главных) миноров матрицы квадратичной формы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(B).$$

Если все главные миноры не равны 0, то существует базис, в котором квадратичная форма с матрицей  $B$  имеет вид

$$Q(\mathbf{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2.$$

**Задача 6.** Привести квадратичную форму

$$Q(\mathbf{y}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду с помощью метода Якоби. Определить индексы инерции и ранг.

**Решение:** Матрица такой квадратичной формы равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -22.$$

Тогда

$$Q(\mathbf{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + 22y_3^2.$$

Тогда

$$r_-(Q) = 1, \quad r_+(Q) = 2, \quad \text{Rg}(Q) = 3.$$

Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одну можно привести к другой линейной невырожденной заменой переменных. Чтобы определить, эквивалентны ли две квадратичные формы над полем действительных чисел, нужно проверить три инварианта квадратичных форм: положительный и отрицательный индекс инерции и ранг. Для этого каждую квадратичную форму можно привести к каноническому (или нормальному) виду и определить количество положительных, отрицательных и ненулевых коэффициентов соответственно. Если все инварианты совпадают, то квадратичные формы над  $\mathbb{R}$  эквивалентны.

Для квадратичной формы над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел понятия отрицательного и положительного индекса инерции теряют смысл. Единственным инвариантом остается ранг.

**Задача 7.** Для квадратичной формы

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2$$

- Найти нормальный вид в области вещественных чисел,
- Указать линейное преобразование, приводящее к этому виду,
- Определить, к какому типу знакоопределенности принадлежит форма,
- Определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

**Решение:** а) Приведем квадратичную форму к нормальному виду с помощью метода Лагранжа

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 2x_3^2 = \left[ \begin{array}{c} \text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата} \end{array} \right] = \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + \underbrace{x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3}_{-x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3} + 2x_3^2) - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3) - 2x_3^2 = \left[ \begin{array}{c} \text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата} \end{array} \right] = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + \underbrace{4x_3^2}_{+4x_3^2}) + 4x_3^2 - 2x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, квадратичная форма в области вещественных чисел имеет нормальный вид

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= x_2 + 2x_3, \\ y_3 &= \sqrt{2}x_3. \end{aligned}$$

- б) Формулы выше задают линейное преобразование, приводящее к нормальному виду.  
 в) Определим индексы инерции и ранг квадратичной формы:

$$r_+(Q) = 2, \quad r_-(Q) = 1, \quad \text{Rg}(Q) = r_+(Q) + r_-(Q) = 3.$$

Таким образом, квадратичная форма не является знакоопределенной.

г) Для того, чтобы определить, существует ли базис, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

определим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

Все главные миноры матрицы  $B$  отличны от нуля, а потому квадратичная форма  $B$  приводится к каноническому виду с помощью метода Якоби:

$$B(\mathbf{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 12y_3^2.$$

Определим инварианты квадратичной формы:

$$r_+(B) = 2, \quad r_-(B) = 1, \quad \text{Rg}(B) = r_+(B) + r_-(B) = 3.$$

Все инварианты совпадают, а значит, существует базис, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу  $B$ . Для поля комплексных чисел ответ не изменится, поскольку ранги квадратичных форм совпадают.

**Задача 8.** Для квадратичной формы

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_3^2$$

- а) Найти нормальный вид в области вещественных чисел,  
 б) Указать линейное преобразование, приводящее к этому виду,  
 в) Определить, к какому типу знакоопределенности принадлежит форма,  
 г) Определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 6 & 3 & 8 \\ 14 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

**Решение:** а) Приведем квадратичную форму к нормальному виду с помощью метода Лагранжа:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= (x_1^2 + 4x_1x_2) + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_3^2 = \left[ \begin{array}{l} \text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата} \end{array} \right] = \\ &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3) - 2x_3^2 = \left[ \begin{array}{l} \text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата} \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 - 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - (x_3)^2.$$

Таким образом, квадратичная форма в области вещественных чисел имеет нормальный вид

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,$$

где

$$y_1 = x_1 + 2x_2,$$

$$y_2 = x_2 - x_3,$$

$$y_3 = x_3.$$

б) Формулы выше задают линейное преобразование, приводящее к нормальному виду.

в) Определим индексы инерции и ранг квадратичной формы:

$$r_+(Q) = 1, \quad r_-(Q) = 2, \quad \text{Rg}(Q) = r_+(Q) + r_-(Q) = 3.$$

Таким образом, квадратичная форма не является знакоопределенной.

г) Для того, чтобы определить, существует ли базис, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 6 & 3 & 8 \\ 14 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

определим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 6 & 3 & 8 \\ 14 & 8 & 18 \end{vmatrix} = -2.$$

Все главные миноры матрицы  $B$  отличны от нуля, а потому квадратичная форма  $B$  приводится к каноническому виду с помощью метода Якоби:

$$B(\mathbf{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = 11y_1^2 - \frac{3}{11} y_2^2 + \frac{2}{3} y_3^2.$$

Определим инварианты квадратичной формы:

$$r_+(B) = 2, \quad r_-(B) = 1, \quad \text{Rg}(B) = r_+(B) + r_-(B) = 3.$$

Индексы инерции квадратичных форм не совпадают, а значит, не существует базиса, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу  $B$ . Для поля комплексных чисел ответ изменится (т.е. такой базис существует), поскольку ранги квадратичных форм совпадают.

**Задача 9.** Выяснить, эквивалентны ли квадратичные формы

$$Q_1(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3, \quad Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_3^2$$

над полем действительных чисел?

**Решение:** Приведем квадратичную форму  $Q_1(\mathbf{x})$  к нормальному виду с помощью метода Лагранжа (выкладки опускаю):

$$Q(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3.$$

Таким образом, квадратичная форма в области вещественных чисел имеет нормальный вид

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 &= \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \\ y_3 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Индексы инерции и ранг квадратичной формы равны:

$$r_+(Q_1) = 2, \quad r_-(Q_1) = 1, \quad \text{Rg}(Q_1) = r_+(Q_1) + r_-(Q_1) = 3.$$

Квадратичную форму  $Q_2(\mathbf{x})$  можно привести к каноническому виду или с помощью метода Лагранжа, или с помощью метода Якоби. Воспользуемся методом Якоби. Матрица квадратичной формы  $Q_2(\mathbf{x})$  равна

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40.$$

Все главные миноры матрицы  $Q_2$  отличны от нуля, а потому квадратичная форма  $Q_2(\mathbf{x})$  приводится к каноническому виду с помощью метода Якоби:

$$Q_2(\mathbf{y}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = 2y_1^2 - 9y_2^2 - \frac{20}{9}y_3^2.$$

Определим инварианты квадратичной формы:

$$r_+(Q_2) = 1, \quad r_-(Q_2) = 2, \quad \text{Rg}(Q_2) = r_+(Q_2) + r_-(Q_2) = 3.$$

Индексы инерции квадратичных форм не совпадают, а значит, квадратичные формы над полем  $\mathbb{R}$  не эквивалентны, но эквивалентны над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Исследовать квадратичную форму

$$Q(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$$

на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

Ответ:  $Q(\mathbf{x})$  положительно определена.

**Задача 2.** Исследовать квадратичную форму

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$$

на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

Ответ:  $Q(\mathbf{x})$  положительно определена.

**Задача 3.** Для квадратичной формы

$$Q(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

- а) Найти нормальный вид в области вещественных чисел,
- б) Указать линейное преобразование, приводящее к этому виду,
- в) Определить, к какому типу знакоопределенности принадлежит форма,
- г) Определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

Ответ: а)  $Q(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , б)  $\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 - 2x_1, \\ y_2 = x_3 + 4x_1, \\ y_3 = \sqrt{12}x_1. \end{cases}$ , в) Неопределенная, г) Не существует в  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .

**Задача 4.** Выяснить, эквивалентны ли квадратичные формы

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3, \quad Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

над полем действительных чисел?

Ответ: Да.