Подготовка к контрольной работе - 1

§1. Матрица перехода

Пусть дано n-мерное линейное пространство $\mathcal{L}$, пусть $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ — два базиса в $\mathcal{L}$. В *матрице перехода* $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$ от базиса $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ к базису $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ по столбцам записаны координаты нового базиса ($\boldsymbol{b}$) в старом ($\boldsymbol{a}$). Основные свойства матрицы перехода:

1°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}} = E$.

2°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \left(T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}\right)^{-1}$,

3°. $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}$.

Если задана матрица перехода $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}$, то при замене базиса координаты вектора $\boldsymbol{x}$ пересчитываются по формуле

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}}.$$

Если новый базис получен из старого поворотом вокруг некоторой оси на угол φ, то матрица перехода называется *матрицей поворота*. Матрица поворота вокруг базисных векторов в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол φ имеет вид

$$T_{\boldsymbol{i}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, T_{\boldsymbol{j}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, T_{\boldsymbol{k}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для поворота в отрицательном направлении (по часовой стрелке) достаточно подставить вместо φ отрицательный угол $-\varphi$. Матрица поворота является ортогональной матрицей, что значит

$$T^T = T^{-1}.$$

Задача 1.1. Матрица поворота. Базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворачивается на 180° вокруг вектора $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, потом на 90° в отрицательном направлении вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{j}$. В результате получается базис $\boldsymbol{E}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$. Найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1, 1, 1)$.

Решение: Сначала запишем матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}$, потом $T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''}$, а потом воспользуемся свойством 3° матриц перехода. Поворот вокруг вектора $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ нельзя осуществить в помощью матриц поворота $T_{\boldsymbol{i}}$, $T_{\boldsymbol{j}}$, $T_{\boldsymbol{k}}$, однако можно перейти к базису, в котором данный вектор совпадает с координатным вектором, осуществить поворот там, а потом вернуться в старый базис. В данном случае это можно сделать так:

1) Сначала поворачиваем базис $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ на 45° вокруг вектора k, чтобы направляющий вектор заданной прямой $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ совпал с осью $\boldsymbol{i'}$. Для этого воспользуемся формулой $T_{\boldsymbol{k}}$, подставив $\varphi = 45°$:

$$T_1 = T_{\boldsymbol{k}}(45°) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Вращаем на 180° базис вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{i}$, подставляя $\varphi = 180°$ в формулу для $T_{\boldsymbol{i}}$:

$$T_2 = T_{\boldsymbol{i}}(180°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Для того, чтобы вернуться в базис $\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, вычисляем обратную к матрице T_1:

$$T_3 = T_1^{-1} = T_1^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Таким образом, поворот базиса $\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ на 180° вокруг вектора $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ выполняется с помощью матрицы

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'} = T_1T_2T_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Правда, в данном случае можно поступить проще, поскольку поворот на 180° вокруг указанной прямой легко представить геометрически.

Для того, чтобы найти матрицу перехода $T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''}$, воспользуемся матрицей $T_{\boldsymbol{j}}$, поскольку поворот выполняется вокруг нового положения вектора $\boldsymbol{j}$. Подставим $\varphi=-90^\circ$ (по условию задачи поворот выполняется в отрицательном направлении) в формулу для $T_{\boldsymbol{j}}$:

$$T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{j}}(-90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге по свойству 3° матриц перехода имеем

$$T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'}T_{\boldsymbol{E}'\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{E}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{E}''$) имеет координаты $(1,1,1)$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T_{\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. Матрица перехода в произвольных базисах. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1=(1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,3,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,7,1)$ к базису $\boldsymbol{b}_1=(3,1,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(5,2,1)$, $\boldsymbol{b}_3=(1,1,-6)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Найти в старом базисе координаты вектора, который в новом базисе имеет координаты $(1,2,3)$.

Решение: По свойству 3° матриц перехода получим

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \big(T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}}\big)^{-1}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}},$$

где $\boldsymbol{e}$ — стандартный базис, в котором записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$. Обозначим:

$$A = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах координаты данных векторов записаны по столбцам. Тогда нужно найти матрицу
$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B.$$
Напомню, что для нахождения такой матрицы достаточно воспользоваться цепочкой элементарных преобразований строк следующим образом:
$$\big(A|B\big) \sim \dots \sim \big(E|A^{-1}B\big).$$
В данном случае получим:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +\mathrm{II} \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 12 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3\cdot\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -18 & -31 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 12 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -42 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 12 & 8 \end{array}\right).$$
Итак,
$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$
Чтобы найти в старом базисе ($\boldsymbol{a}$) координаты вектора, который в новом базисе ($\boldsymbol{b}$) имеет координаты $(1, 2, 3)$, воспользуемся формулой пересчета координат при замене базиса:
$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -307 \\ 79 \\ 55 \end{pmatrix}.$$
Ответ: $T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} -307 \\ 79 \\ 55 \end{pmatrix}$.

§2. Сумма и пересечение подпространств

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $U \subset \mathcal{L}$, $W \subset \mathcal{L}$ — линейные подпространства этого линейного пространства. *Суммой* линейных подпространств U и W называется множество таких векторов:

$$\boldsymbol{z} \in U + W \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W.$$

Пересечением линейных подпространств U и W называется множество таких векторов $\boldsymbol{z}$, которые принадлежат одновременно и первому, и второму подпространству:

$$\boldsymbol{z} \in U \cap W \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{z} \in U,\ \boldsymbol{z} \in W.$$

Размерности суммы и пересечения связаны между собой с помощью *формулы Грассмана*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Задача 2. Сумма и пересечение подпространств. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

а) Найти размерности подпространств:

$$U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \quad W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

б) Найти размерность суммы $U + W$ подпространств и выделить среди векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ базис пространства $U + W$,
4) Найти размерность и построить какой-нибудь базис пересечения подпространств $U \cap W$.

Решение: а) Для нахождения размерности подпространств достаточно найти ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \cdot \mathrm{I} \\ -3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :4 \\ :7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}} \right),$$

значит,

$$\operatorname{Rg} A = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim U = 2.$$

Базис подпространства U можно выбрать как столбцы базисного минора. Например, базисом подпространства U являются векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$. Аналогично,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{IV} \\ \\ \\ \to \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -6 \cdot \mathrm{I} \\ -3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to \mathrm{IV} \\ \to \mathrm{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & -6 & 10 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

значит,

$$\mathrm{Rg}\, B = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim W = 3.$$

Базис подпространства W можно выбрать как столбцы базисного минора, то есть $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$.

б) Чтобы найти базис и размерность подпространства $U + W$, запишем в матрицу координаты базисов пространств U и W и приведем ее к ступенчатому виду. Столбцы базисного минора дадут базис пространства $U + W$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot \mathrm{I} \\ -3\cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -7\cdot \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \text{третья строка} \\ \text{линейно зависит} \\ \text{от второй} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-8) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

В базисный минор вошли первый, второй и последний столбцы. В исходной матрице там были записаны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. Значит, эти векторы и образуют базис пространства $U + W$. Итак,

$$\dim(U + W) = 3, \quad U + W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3\}.$$

в) Для нахожения базиса пересечения подпространств $U \cap W$ есть два способа.

I способ. С помощью неявного задания подпространств. Если задать подпространства U и W неявно, то есть с помощью системы линейных уравнений, а потом объединить все уравнения в одну систему, решение системы даст базис пересечения подпространств.

Чтобы задать неявно подпространство U, решим систему с матрицей A^T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -7\cdot \mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Пусть α_1, α_2 — базисные переменные, а $\alpha_3 = C_1$, $\alpha_4 = C_2$ — свободные. Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты ФСР полученной СЛАУ задают коэффициенты системы однородных уравнений, неявно задающие подпространство U. Значит, подпространство U задается неявно системой уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Чтобы задать неявно подпространство W, решим систему с матрицей B^T:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\cdot \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \mathrm{III} \\ \to \mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -12 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ +3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-8) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3\cdot\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{|cc|c|c|} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Пусть свободной переменной является $\alpha_3 = C$, а остальные переменные являются базисными. Выражая последовательно базисные переменные через свободные, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, подпространство W задается неявно системой из одного уравнения

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Для нахождения базиса пересечения объединим в одну систему линейные однородные уравнения, задающие неявно пространства U и W:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 & = & 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Решив эту систему уравнений, получим базис пространства $U \cap W$. В данном случае заметим, что первое и последнее уравнение этой системы совпадают, а потому эта система эквивалентна следующей:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Решать эту систему не обязательно[1], ведь мы же знаем, что именно эта система задавала пространство U неявно. Значит,

$$\dim(U \cap W) = 2, \quad U \cap W = U = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}.$$

II способ. В виде линейной комбинации векторов. Если подпространство $U \cap W$ не пусто, то существует вектор, который принадлежит обоим подпространствам, то есть найдется такая нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами α_i, β_j, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_3 = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \beta_3 \boldsymbol{b}_3.$$

При записи этой формулы использовался тот факт, что подпространство U порождается векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$, а подпространство W — векторами $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. Перепишем последнее уравнение в виде:

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_3 - \beta_1 \boldsymbol{b}_1 - \beta_2 \boldsymbol{b}_2 - \beta_3 \boldsymbol{b}_3 = 0.$$

Нетривиальное решение этого уравнение дает базис пересечения подпространств.

[1]Конечно, вряд ли вам так повезет на контрольной работе. Скорее всего, придется решать полученную систему.

Итак, найдем решение этой системы в данном случае:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -7\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \text{третья строка} \\ \text{линейно зависит} \\ \text{от второй} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :8 \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

Свободными переменными являются $\beta_2 = c_1$, $\beta_3 = c_2$, базисными — α_1, α_2, β_1. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\beta_1 = -c_2, \quad \alpha_2 = c_1 + c_2, \quad \alpha_1 = -c_1 - 2c_2.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый вектор ФСР

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0,$$

дает коэффициенты первой линейной комбинации для нахождения вектора из базиса пересечения:

$$\boldsymbol{f}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\boldsymbol{f}_1 = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \beta_3 \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Совпадение координат вектора $\boldsymbol{f}_1$ подтверждает правильность решения СЛАУ.

Второй вектор ФСР

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = -1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1,$$

дает коэффициенты второй линейной комбинации для нахождения вектора из базиса пересечения:

$$\boldsymbol{f}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_3 = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

или

$$\boldsymbol{f}_2 = \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2 + \beta_3\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3 = -\begin{pmatrix}3\\0\\6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\dim(U+W) = 2, \quad U \cap W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}, \quad \text{где } \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Замечание. На первый взгляд может показаться, что ответы в пункте в), полученные разными способами, разные. Однако это не так. Векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, образующие базис пересечения, являются линейными комбинациями базисных векторов подпространства U. Они линейно независимы, а их количество совпадает с размерностью подпространства U, а потому $U \cap W = U$.

Ответ: а) $\dim U = 2$, $\dim W = 3$.
б) $\dim(U+W) = 3$, $U + W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3\}$.
в) $\dim(U+W) = 2$, $U \cap W = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\} = \operatorname{span}\{-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3\}$.

§3. Евклидовы пространства

Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. Стандартным образом в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задается как сумма попарных произведений координат:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ называются *ортогональными*, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Базис пространства $\mathcal{L}$ называется *ортогональным*, если все векторы базиса попарно ортогональны. Ортогональный базис пространства называется *ортонормированным*, если все векторы имеют единичную длину.

Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — подпространство евклидова пространства $\mathcal{L}$. *Ортогональным дополнением* $U^\perp$ к подпространству U называется множество векторов из $\mathcal{L}$, ортогональным к векторам из U:

$$U^\perp = \{\boldsymbol{x} \,\big|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in U\}.$$

Можно показать, что $U^\perp$ образует подпространство в $\mathcal{L}$ и $U \oplus U^\perp = \mathcal{L}$. Таким образом, любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in U,\ \boldsymbol{z} \in U^\perp.$$

При этом вектор $\boldsymbol{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство U, а вектор $\boldsymbol{z}$ — ортогональным дополнением вектора $\boldsymbol{x}$ к подпространству U.

Если найдено разложение вектора $\boldsymbol{x}$ на сумму ортогональной проекции и ортогональной составляющей, то расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ до подпространства U определяется как длина ортогональной составляющей

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, U) = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})}.$$

Угол между вектором и подпространством U определяется как угол между вектором и его ортогональной проекцией на подпространство U. Косинус угла может быть найден с помощью скалярного произведения:

$$\cos\angle(\boldsymbol{x}, U) = \cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|}.$$

Процедура ортогонализации Грама-Шмидта позволяет получить по заданной линейно независимой системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ ортогональную систему векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ с помощью следующих формул

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1, \\
\ldots & \\
\boldsymbol{b}_k &= \boldsymbol{a}_k - \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \ldots - \frac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k-1})}{(\boldsymbol{b}_{k-1}, \boldsymbol{b}_{k-1})}\boldsymbol{b}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Согласно теореме о QR-разложении, любая матрица A с действительными элементами может быть представлена в виде произведения матриц

$$A = QR,$$

где Q — ортогональная матрица, R — верхнетреугольная матрица. При этом матрица Q содержит координаты ортонормированного базиса, полученного из базиса $\boldsymbol{a}$ с помощью процедуры ортогонализации с последующим нормированием ортогональных векторов, а матрица R является матрицей перехода от нового ортонормированного базиса $\boldsymbol{b}$ к старому базису $\boldsymbol{a}$.

Задача 3.1. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{x} = (-10, 1, 1, 12)$ на подпространство U, натянутое на векторы $\boldsymbol{a} = (1, 5, 5, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (1, 3, 3, 5)$. Найти угол и расстояние между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством U.

Решение: Пусть

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},$$

где $\boldsymbol{y}$ — ортогональная проекция, а $\boldsymbol{z}$ — ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{x}$. Тогда $\boldsymbol{y} \in U$, что означает, что $\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}$, то есть

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{z}. \tag{1}$$

Умножим (1) скалярно на $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \lambda_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}).$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 12, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 52, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 36.$$

Кроме того, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) = 0$, поскольку $\boldsymbol{z} \in U^{\perp}$. Подстановка скалярных произведений в уравнение выше дает:

$$12 = 52\lambda_1 + 36\lambda_2.$$

Аналогично, умножим (1) скалярно на $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \lambda_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}).$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 56, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 36, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 44.$$

Подстановка скалярных произведений в уравнение выше дает:

$$56 = 36\lambda_1 + 44\lambda_2.$$

Решение системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 52\lambda_1 + 36\lambda_2 & = & 12 \\ 36\lambda_1 + 44\lambda_2 & = & 56 \end{array} \right.$$

имеет вид

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Найдем ортогональную проекцию

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

откуда ортогональная составляющая равна

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки можно убедиться, что $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) = 0$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}) = 0$.

Расстояние между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством U равно

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, U) = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}.$$

Косинус угла между вектором $\boldsymbol{x}$ и подпространством U равен:

$$\cos\angle(\boldsymbol{x}, U) = \cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} = \frac{122}{\sqrt{246} \cdot \sqrt{122}} = \sqrt{\frac{61}{123}},$$

откуда

$$\angle(\boldsymbol{x}, U) = \arccos\sqrt{\frac{61}{123}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, U) = 2\sqrt{31}$, $\angle(\boldsymbol{x}, U) = \arccos\sqrt{\frac{61}{123}}$.

Замечание. В контрольной работе есть варианты, где подпространство задано в неявном виде, то есть как решение некоторой однородной СЛАУ, например:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 &= 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 &= 0 \end{cases}$$

Для решения задачи вовсе не обязательно находить базис подпространства U в явном виде. Коэффициенты этой СЛАУ дают базис ортогонального дополнения $U^\perp$, то есть вектор $\boldsymbol{z}$ может быть найден в виде линейной комбинации векторов

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b},$$

после чего аналогичный алгоритм применяется для нахождения $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y}$.

Задача 3.2. QR-разложение матрицы. Найти QR-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним процедуру ортогонализации, одновременно выражая векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1.$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2.$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Для удобства будем считать, что на очередном шаге процедуры ортогонализации мы нашли не вектор $\boldsymbol{b}_3$, а вектор $2\boldsymbol{b}_3$, тогда

$$2\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3.$$

Нормируем векторы $\boldsymbol{b}_j$:

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{b}_1^0, \quad \boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{b}_2^0, \quad \boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_3^0.$$

Подставив последние выражения в формулы, выражающие векторы $\boldsymbol{a}_i$ через $\boldsymbol{b}_j$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{b}_1^0, \\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{b}_1^0 + 3\boldsymbol{b}_2^0, \\ \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_1^0 - 3\boldsymbol{b}_2^0 + 6\boldsymbol{b}_3^0. \end{aligned}$$

Осталось составить матрицы Q и R. В матрицу Q записываем координаты полученной ортономированной системы, то есть координаты векторов $\boldsymbol{b}_j^0$:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица R равна матрице перехода от базиса $\boldsymbol{b}^0$ к базису $\boldsymbol{a}$, то есть она содержит коэффициенты разложения векторов $\boldsymbol{a}$ через $\boldsymbol{b}^0$, записанные по столбцам:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для проверки достаточно вычислить произведение матриц

$$QR = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

Ответ: $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

§4. Квадратичные формы

Квадратичной формой будем называть выражение вида

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} x_j^2 + 2\sum_{j<k} b_{jk} x_j x_k.$$

Каноническим видом квадратичной формы называется

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 - \lambda_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - \lambda_n y_n^2,$$

где все $\lambda_i > 0$. В этом случае число

$$r_+ = k$$

называется *положительным индексом инерции*, а $r_- = n - k$ *отрицательным индексом инерции*. Таким образом, положительный (отрицательный) индекс инерции определяется как число положительных (отрицательных) слагаемых в каноническом виде квадратичной формы. *Рангом* $\mathrm{Rg}(Q)$ квадратичной формы в каноническом виде называется число ее ненулевых слагаемых. Числа r_+, r_-, $\mathrm{Rg}(Q)$ являются инвариантами квадратичной формы, то есть не зависят от выбора базиса. Для нахождения индексов инерции квадратичной формы, заданной не в каноническом виде, стоит сделать замену базиса и привести квадратичную форму к каноническому виду.

Нормальным видом квадратичной формы называется

$$Q(y) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_n^2.$$

Для приведения матрицы квадратичной формы к нормальному виду можно использовать *метод Лагранжа*, который заключается в последовательном выделении полных квадратов. Пусть, например, $b_{11} \neq 0$. Тогда рассматриваем все слагаемые, содержащие x_1:

$$\sigma_1 = b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2b_{1n} x_1 x_n + r(x_2, \ldots, x_n),$$

и выделяем полный квадрат в σ_1:

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}} (b_{11} x_1 + \ldots + b_{1n} x_n)^2 - \gamma + r(x_2, \ldots, x_n).$$

Обозначаем $y_1 = b_{11} x_1 + \ldots + b_{1n} x_n$. Тогда квадратичная форма примет вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{b_{11}} (y_1)^2 - \gamma + + r(x_2, \ldots, x_n),$$

причем γ не содержит слагаемых с x_1. В этом выражении тоже выделяем полный квадрат и повторяем процедуру до тех пор, пока не придем к каноническому виду. При этом переменные x_i последовательно исключаются из квадратичной формы.

Если $b_{11} = 0$, но $b_{kk} \neq 0$ для некоторого k, можно рассмотреть слагаемые, содержащие x_k. При этом переменные квадратичной формы последовательно исключаются из рассмотрения.

Если на очередном шаге получается квадратичная форма, которая не содержит полных квадратов, но содержит слагаемое $x_j x_k$ для некоторых j, k, можно сделать замену

$$x_j = x'_j + x'_k, \quad x_k = x'_j - x'_k,$$

после чего квадратичная форма будет содержать квадраты некоторых переменных.

Матрицей квадратичной формы

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{j<k} b_{jk} x_j x_k$$

называется симметричная матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Метод Якоби приведения матрицы квадратичной формы к каноническому виду требует сначала вычисления угловых (главных) миноров матрицы квадратичной формы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(B).$$

Если все главные миноры не равны 0, то существует базис, в котором квадратичная форма с матрицей B имеет вид

$$Q(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2.$$

Квадратичная форма называется положительно определенной, если ее отрицательный индекс инерции равен нулю[2]. Аналогично, квадратичная форма называется отрицательно определенной, если ее положительный индекс инерции равен 0. Квадратичная форма называется неопределенной, если она не является положительно определенной и отрицательно определенной.

Для квадратичной формы над полем комлексных чисел понятия отрицательного и положительного индекса инерции теряют смысл. Единственным инвариантом остается ранг.

Задача 4. Квадратичные формы. Для квадратичной формы

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2$$

а) Найти нормальный вид в области вещественных чисел,
б) Указать линейное преобразование, приводящее к этому виду,
в) Определить, к какому типу знакоопределенности принадлежит форма,
г) Определить, существует ли базис, в котором данная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изменится ли ответ в случае поля комплексных чисел?

Решение: а) Приведем квадратичную форму к нормальному виду с помощью метода Лагранжа

$$Q(\boldsymbol{x}) = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3\right) + 2x_3^2 = \begin{bmatrix} \text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата} \end{bmatrix} =$$

[2]Это не определение, но для выполнения контрольной работы этого достаточно.

$$= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \underline{+x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3}\right) \underline{-x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3} + 2x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)^2 - \left(x_2^2 + 4x_2x_3\right) - 2x_3^2 = \begin{bmatrix}\text{дополняем выражение в скобках} \\ \text{до полного квадрата}\end{bmatrix} =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)^2 - \left(x_2^2 + 4x_2x_3 \underline{+4x_3^2}\right) \underline{+4x_3^2} - 2x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right)^2 - \left(x_2 + 2x_3\right)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2.$$

Таким образом, квадратичная форма в области вещественных чисел имеет нормальный вид

$$Q(\boldsymbol{y}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= x_2 + 2x_3, \\ y_3 &= \sqrt{2}x_3. \end{aligned}$$

б) Формулы выше задают линейное преобразование, приводящее к нормальному виду.

в) Определим индексы инерции и ранг квадратичной формы:

$$r_+(Q) = 2, \quad r_-(Q) = 1, \quad \mathrm{Rg}(Q) = r_+ + r_- = 3.$$

Таким образом, квадратичная форма не является знакоопределенной.

г) Для того, чтобы определить, существует ли базис, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

определим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

Все главные миноры матрицы B отличны от нуля, а потому квадратичная форма B приводится к каноническому виду с помощью метода Якоби:

$$B(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 12y_3^2.$$

Определим инварианты квадратичной формы:

$$r_+(B) = 2, \quad r_-(B) = 1, \quad \mathrm{Rg}(B) = r_+(B) + r_-(B) = 3.$$

Все инварианты совпадают, а значит, существует базис, в котором данная квадратичная форма имеет матрицу B. Для поля комплексных чисел ответ не изменится, поскольку ранги квадратичных форм совпадают.

Ответ: а) $Q(y) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$,
б) $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$,
$y_2 = x_2 + 2x_3$,
$y_3 = \sqrt{2}x_3$.
в) Квадратичная форма не является знакоопределенной.
г) Да, существует в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.