# Семинар 13. Линейные операторы. Матрица линейного оператора

## §1. Матрица линейного оператора

*Линейным оператором* в линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$ называется всякое отображение $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ такое, что

1) $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$,

2) $A(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

*Матрицей* линейного оператора в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ называется матрица, в которой по столбцам записаны значения линейного оператор на векторах базиса $\mathcal{E}$, то есть

$$[A]_\mathcal{E} = \big([A\boldsymbol{e}_1]\ [A\boldsymbol{e}_2]\ \ldots\ [A\boldsymbol{e}_n]\big).$$

В этом случае образ $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ при отображении $A$ вычисляется по формуле:

$$[\boldsymbol{y}]_\mathcal{E} = [A]_\mathcal{E}[\boldsymbol{x}]_\mathcal{E},$$

если оба вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ заданы в базисе $\mathcal{E}$.

В следующих задачах установить, какие из отображений из $V_3$ в $V_3$ являются линейными операторами. В случае, если отображение является линейным оператором, найти его матрицу в стандартном базисе.

**Задача 1.** $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

**Решение:** Здесь отображение $A$ вектору $\boldsymbol{x}$ ставит в соответствие коллинеарный ему вектор $\lambda\boldsymbol{x}$, где $\lambda$ — элемент поля $\mathbb{R}$. Конечно, такое отображение является линейным оператором, поскольку

1) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$ в силу свойств линейного пространства (аксиома 8),

2 $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = \lambda\mu\boldsymbol{x} = \mu(\lambda\boldsymbol{x})$ также в силу свойств линейного пространства (аксиома 6).

Чтобы найти матрицу такого линейного оператора в стандартном базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, нужно применить оператор к векторам из стандартного базиса и записать результат в матрицу по столбцам. Очевидно, что

$$A\boldsymbol{i} = \lambda\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{j} = \lambda\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{k} = \lambda\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица этого линейного оператора равна

$$A = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ — заданный вектор, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{e}$.

**Решение:** Такое отображение тоже является линейным оператором в силу свойств скалярного произведения (скалярное произведение линейно по каждому из аргументов). Вычислим матрицу этого линейного оператора. Для этого надо вычислить результат применения этого оператора к векторам из стандартного базиса и записать результат по столбцам. Обозначим координаты заданного вектора $\boldsymbol{e}$ через $\big(x_e, y_e, x_e\big)^T$. Сначала вычислим скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}) = x_e, \quad (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}) = y_e, \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) = z_e.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{i} &= (\boldsymbol{i},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = x_e(x_e\boldsymbol{i} + y_e\boldsymbol{j} + z_e\boldsymbol{k}) = x_e^2\boldsymbol{i} + x_e y_e\boldsymbol{j} + x_e z_e\boldsymbol{k},\\
A\boldsymbol{j} &= (\boldsymbol{j},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = y_e(x_e\boldsymbol{i} + y_e\boldsymbol{j} + z_e\boldsymbol{k}) = x_e y_e\boldsymbol{i} + y_e^2\boldsymbol{j} + y_e z_e\boldsymbol{k},\\
A\boldsymbol{k} &= (\boldsymbol{k},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = z_e(x_e\boldsymbol{i} + y_e\boldsymbol{j} + z_e\boldsymbol{k}) = x_e y_e\boldsymbol{i} + y_e z_e\boldsymbol{j} + z_e^2\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Осталось только записать результат в матрицу по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} x_e^2 & x_e y_e & x_e z_e \\ x_e y_e & y_e^2 & y_e z_e \\ x_e z_e & y_e z_e & z_e^2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}$ — заданный вектор, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$.

**Решение:** Этот оператор не является линейным. В этом достаточно убедиться при умножении вектора $\boldsymbol{x}$ на действительное число $\lambda$:

$$A(\lambda\boldsymbol{x}) = (a,\lambda\boldsymbol{x})\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \neq \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}.$$

**Задача 4.** $A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}]$, где $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{k}$.

**Решение:** Это отображение является линейным оператором, в силу свойств векторного произведения (оно линейно по каждому из своих аргументов). Найдем матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе. Из курса аналитической геометрии в первом семестре известно, что

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}] = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** На этом примере видно, что матрица линейного оператора не обязана быть невырожденной.

**Задача 5.** Пусть оператор $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан по правилу

$$A\boldsymbol{x} = \big(x, y+1, z+2\big)^T,$$

где $\big(x,y,z\big)^T$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$. Является ли это отображение линейным оператором? Если да, найти матрицу линейного оператора.

**Решение:** Это отображение не является линейным оператором. Убедимся в этом при умножении на число $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A(\lambda\boldsymbol{x}) = \big(\lambda x, \lambda y + 1, \lambda z + 2\big)^T \neq \lambda A(\boldsymbol{x}).$$

**Задача 6.** Пусть оператор $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан по правилу

$$A\boldsymbol{x} = \big(x + 2y + 2z, -3y + z, 2x + 3z\big)^T,$$

где $\left(x, y, z\right)^T$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$. Является ли это отображение линейным оператором? Если да, найти матрицу линейного оператора.

**Решение:** Это отображение является линейным оператором (проверьте свойство линейности и убедитесь в этом). Найдем матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе. Для вектора $\boldsymbol{i}$ координаты равны $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. Подставим эти значения в формулу для вычисления $A\boldsymbol{x}$:

$$A\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 + 0 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$A\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Задача 7.** В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше $n$ с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел задан оператор $D = \dfrac{d}{dt}$ дифференцирования по переменной $t$. Является ли этот оператор линейным? Если да, найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$.

**Решение:** Этот оператор является линейным в силу свойства линейности дифференцирования (производная от суммы равна сумме производных, константу можно выносить за знак производной). Найдем матрицу этого линейного оператора. Очевидно, что

$$D(1) = \frac{d1}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(t) = \frac{dt}{dt} = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D(t^2) = \frac{dt^2}{dt} = 2t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad D(t^n) = \frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

## §2. Ядро и образ линейного оператора

*Ядром* линейного оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется множество

$$\operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{L} : \quad A(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

*Образом* линейного оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{L} : \quad (\exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}) : A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}.$$

Таким образом, ядро линейного оператора — это множество таких векторов, образ которых равен нулю. Образ линейного оператора — множество образов произвольных векторов линейного пространства. Ядро и образ линейного оператора являются подпространствами линейного пространства $\mathcal{L}$ (докажите это).

**Вопрос**. Чему равна сумма $\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A)$?[1]

**Задача 8.** Найти ядро и образ линейного оператора, заданного следующей матрицей в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение:** Определитель этой матрицы равен

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

то есть матрица $A$ невырождена. Значит, образ линейного оператора совпадает со всем пространством $V_3$, а ядро состоит только из нулевого вектора.

**Задача 9.** Найти ядро и образ линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного следующей матрицей в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Решение:** Определитель матрицы равен 0, значит, размерность ядра больше нуля. Приведем матрицу линейного оператора к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Базисным является минор $M_{1,2}^{1,2}$, стоящий на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов. Таким образом, образ линейного оператора равен

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

[1] $n = \dim(\mathcal{L})$. Это теорема встречалась нам в прошлом семестре, и в англоязычной литературе ее называют Rank-Nullity Theorem. Размерность образа равна рангу матрицы линейного оператора (Rank), а размерность ядра (Nullity) — количеству векторов в фундаментальной системе решений однородной СЛАУ $Ax = 0$.

Чтобы найти ядро линейного оператора, нужно решить однородную СЛАУ $Ax = 0$. ФСР такой системы составляет вектор $\big(-3, 5, 1\big)^T$. Таким образом,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Есть алгоритм, который позволяет находить размерность ядра и образа одновременно, без решения СЛАУ. Алгоритм называется *алгоритмом Чуркина.* Для применения алгоритма записываем блочную матрицу

$$\big(A^T | E\big)$$

и приводим ее к ступенчатому виду. Тогда то, что мы получим, есть блочная матрица вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{образ}^T & \text{что-то ненужное} \\ \hline 0 & \text{ядро}^T \end{array}\right)$$

**Задача 10.** Найти ядро и образ линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного следующей матрицей в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Решение:** Применим алгоритм Чуркина для решения этой же задачи:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Таким образом, образ линейного оператора равен

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что вектор $\big(2, -1, 1\big)^T$ является линейной комбинацией[2] векторов $\big(1, 0, 1\big)^T$ и $\big(0, 1, 1\big)^T$. Ядро линейного оператора равно

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

[2] $\big(2, -1, 1\big)^T = 2\big(1, 0, 1\big)^T - \big(0, 1, 1\big)^T$

## §3. Нахождение матрицы линейного оператора по образу данных векторов

Рассмотрим следующую задачу: пусть линейный оператор $A$, заданный в $n$-мерном пространстве, переводит $n$ заданных векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в $n$ заданных векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, заданных своими координатами в некотором базисе. Как найти матрицу этого линейного оператора в том же базисе?

Пусть $X$ — искомая матрица. Тогда $\boldsymbol{b}_1 = X\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n = X\boldsymbol{a}_n$, откуда $B = XA$, где $A, B$ — матрицы, составленные из векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ соответственно. Значит, для решения такой задачи достаточно решить матричное уравнение $B = XA$. Напомню, что для решения такого уравнения достаточно воспользоваться формулой $X = BA^{-1}$ или использовать следующую цепочку элементарных преобразований:

$$\left(A^T|B^T\right) \sim \left(E|X^T\right).$$

**Задача 11.** Линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (3,1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,0)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

**Решение:** Задача сводится к решению матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 12.** Линейный оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,-1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,3,2)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (4,4,1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,1)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (7,7,2)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

**Решение:** Задача сводится к решению матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 13.** Линейный оператор $A : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,2)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,1,1)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (1,5,2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,6,3)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,4,1)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

**Решение:** Задача сводится к решению матричного уравнения

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

над полем вычетов $\mathbb{Z}_7$. Имеем:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

В первых четырех задачах установить, какие из отображений из $V_3$ в $V_3$ являются линейными операторами. В случае, если отображение является линейным оператором, найти его матрицу в стандартном базисе.

**Задача 1.** $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — заданные векторы, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} x_a x_b & y_a x_b & z_a x_b \\ x_a y_b & y_a y_b & z_a y_b \\ x_a z_b & y_a z_b & z_a z_b \end{pmatrix}$.

**Задача 2.** $A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$, где $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Задача 3.** $A\boldsymbol{x} = \big(x + 2y^2, -3y + 4z, 2x - y - 3z\big)^T$, где $\big(x, y, z\big)^T$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$.

Ответ: Не ЛО.

**Задача 4.** $A\boldsymbol{x} = \big(2x - 5y + z, 3x - y + 7z, 2x - y + z\big)^T$, где $\big(x, y, z\big)^T$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Задача 5.** В пространстве $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов степени не выше 2 с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел задан оператор

$$A\varphi(t) = (t\varphi(t))'.$$

Является ли этот оператор линейным? Если да, найти его матрицу в базисе $\{1, t, t^2\}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**Задача 6.** Найти ядро и образ линейного оператора $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного следующей матрицей в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

**Задача 7.** Найти ядро и образ линейного оператора $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, заданного следующей матрицей в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

**Задача 8.** Линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -1)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (3, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 3)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Задача 9.** Линейный оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,0,1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,2)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-1,1,0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,0,-1)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (2,1,3)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Задача 10.** Линейный оператор $A : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (0,1,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (6,6,2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (6,2,6)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,0,0)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в стандартном базисе.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.