

# Семинар 14. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

## §1. Еще немного об образах линейных операторов

**Задача -1.** Линейный оператор  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  имеет в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти все векторы, которые при отображении  $\varphi$  переходят в вектор  $11\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3$ .

**Решение:** Пусть координаты искомого вектора равны  $(x_1, x_2, x_3)^T$ . Тогда верна система уравнений, записанная в матричном виде:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

или  $A\mathbf{x} = (0 \ 11 \ 11)^T$ . Решим эту неоднородную систему с помощью элементарных преобразований:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot I \\ +I \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \end{array} \right),$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 11/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5/2 \\ -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все вектора указанного вида при отображении  $\varphi$  переходят в вектор  $11\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3$ .

**Задача 0.** Линейный оператор  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  имеет в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти все векторы, которые при отображении  $\varphi$  переходят в вектор  $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ .

**Решение:** Рассуждая аналогично предыдущей задаче, решим систему

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

то есть образ  $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$  получится только при применении линейного оператора к вектору  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ .

## §2. Линейные операторы в евклидовом пространстве

**Задача 1.** Вывести формулу ортогональной проекции вектора на ось в  $V_3$ .

**Решение:** Пусть  $\mathbf{a}$  — заданный вектор, а  $\lambda \mathbf{l}$  — его ортогональная проекция на ось, заданной вектором  $\mathbf{l}$ . Найдем число  $\lambda$ . Вектор  $\mathbf{a}$  можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{l} + \mathbf{z},$$

где  $\mathbf{z}$  — ортогональная составляющая вектора  $\mathbf{a}$  на подпространство, определяемое вектором  $\mathbf{l}$ . Скалярно умножив на вектор  $\mathbf{l}$ , получим:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{l}) = \lambda(\mathbf{l}, \mathbf{l}),$$

откуда  $\lambda = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})}$ . Таким образом, ортогональная проекция вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{l}$  определяется формулой:

$$\text{пр}_{\mathbf{l}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l}. \quad (1)$$

**Задача 2.** Линейный оператор  $\varphi : V_3 \rightarrow V_3$  действует как ортогональное проектирование на прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

**Решение:** Ортогональную проекцию на эту прямую можно определить как проекцию на направляющий вектор этой прямой. Направляющий вектор этой прямой равен  $\mathbf{l} = (1, 0, 1)^T$ . Для нахождения образов векторов базиса  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  достаточно воспользоваться результатом предыдущей задачи, то есть формулой (1). Вычислим образы векторов базиса:

$$\varphi \mathbf{i} = \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \mathbf{j} = \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \mathbf{k} = \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Записав образы базиса по столбцам, получаем матрицу линейного оператора

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица ортогонального проектирования на прямую имеет ранг 1.

**Задача 3.** Вывести формулу ортогональной проекции вектора на плоскость в  $V_3$ .

**Решение:** Пусть  $\mathbf{a}$  — заданный вектор,  $\mathbf{n}$  — нормаль к заданной плоскости  $\alpha$ . Тогда проекция данного вектора на плоскость определяется как ортогональная составляющая при проекции заданного вектора на нормаль, то есть

$$\text{пр}_{\alpha} \mathbf{a} = \mathbf{a} - \text{пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (2)$$

**Задача 4.** Линейный оператор  $\varphi : V_3 \rightarrow V_3$  действует как ортогональное проектирование на плоскость

$$x - 2y + z = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

**Решение:** Нормальный вектор данной плоскости равен  $\mathbf{n} = (1, -2, 1)^T$ . Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  воспользуемся формулой (2):

$$\begin{aligned}\varphi \mathbf{i} &= \mathbf{i} - \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{j} &= \mathbf{j} - \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица ортогонального проектирования на плоскость имеет ранг 2.

**Задача 5.** Вывести формулу расчета вектора  $\mathbf{d}$ , симметричному данному вектору  $\mathbf{a}$  относительно оси, заданной вектором  $\mathbf{l}$  в  $V_3$ .

**Решение:** Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $\mathbf{l}$  определяется формулой (1), а ортогональная составляющая равна

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l}.$$

Если из вектора  $\mathbf{a}$  вычесть умноженный на 2 вектор ортогональной составляющей  $\mathbf{z}$ , получим вектор, симметричный  $\mathbf{a}$  относительно оси  $\mathbf{l}$ , то есть

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - 2 \left( \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} \right) = 2 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} - \mathbf{a}. \quad (3)$$

**Задача 6.** Линейный оператор  $\varphi : V_3 \rightarrow V_3$  действует как симметрия относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

**Решение:** Направляющий вектор данной прямой равен  $\mathbf{l} = (1, 1, 1)^T$ . Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  воспользуемся формулой (3), выведенной в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned}\varphi \mathbf{i} &= 2 \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} - \mathbf{i} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{j} &= 2 \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} - \mathbf{j} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{k} &= 2 \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})} \mathbf{l} - \mathbf{k} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица симметрии относительно прямой ортогональна.

**Задача 7.** Вывести формулу расчета вектора  $\mathbf{d}$ , симметричному данному вектору  $\mathbf{a}$  относительно плоскости  $\pi$  в  $V_3$ .

**Решение:** Пусть нормальный вектор плоскости равен  $\mathbf{n}$ . Если из вектора  $\mathbf{a}$  вычесть удвоенный вектор проекции вектора  $\mathbf{a}$  на нормаль  $\mathbf{n}$ , получим искомый вектор, то есть

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - 2 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}. \quad (4)$$

**Задача 8.** Линейный оператор  $\varphi : V_3 \rightarrow V_3$  действует как симметрия относительно плоскости

$$x - 2y = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

**Решение:** Нормальный вектор данной плоскости равен  $\mathbf{n} = (1, -2, 0)^T$ . Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  воспользуемся формулой (4), выведенной в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} \varphi \mathbf{i} &= \mathbf{i} - 2 \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{j} &= \mathbf{j} - 2 \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi \mathbf{k} &= \mathbf{k} - 2 \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 0}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица симметрии относительно плоскости ортогональна.

### §3. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Матрица линейного оператора зависит от базиса, в котором она записывается. При замене базиса матрица линейного оператора изменяется по закону:

$$A' = T^{-1}AT,$$

где  $A, A'$  — матрицы линейного оператора в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  соответственно,  $T$  — матрица перехода из базиса  $\mathcal{E}$  в базис  $\mathcal{E}'$ .

**Задача 9.** Линейный оператор  $\varphi : V_3 \rightarrow V_3$  действует как ортогональное проектирование на прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  и в базисе  $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$ .

**Решение:** Направляющий вектор данной прямой равен  $\mathbf{l} = (1, 2, 3)^T$ . Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  воспользуемся формулой (1), аналогично задаче 2:

$$\varphi\mathbf{i} = \frac{(\mathbf{i}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})}\mathbf{l} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\mathbf{j} = \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})}\mathbf{l} = \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\mathbf{k} = \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{l})}{(\mathbf{l}, \mathbf{l})}\mathbf{l} = \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$ , используем формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.

Базис  $E'$  задается соотношениями  $\{\mathbf{i}' = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j}' = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{k}' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$ . Таким образом, матрица перехода из базиса  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  в базис  $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$  равна

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней равна

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Применив формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса, получим:

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

**Задача 10.** В базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  линейный оператор  $\varphi$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\mathbf{f}_1 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ .

**Решение:** Матрица перехода в новый базис равна

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней равна

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 13 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Линейный оператор  $\varphi: V_3 \rightarrow V_3$  действует как ортогональное проектирование на прямую

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  и в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$ .

Ответ:  $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$

**Задача 2.** Линейный оператор  $\varphi: V_3 \rightarrow V_3$  действует как ортогональное проектирование на плоскость

$$3x + 2y + z = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  и в базисе  $\{\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{k}\}$ .

Ответ:  $A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -6 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & 13 \end{pmatrix}, A' = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 \\ -3 & 7 & -5 \\ -5 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$

**Задача 3.** Линейный оператор  $\varphi: V_3 \rightarrow V_3$  действует как симметрия относительно прямой

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Убедиться, что полученная матрица ортогональна (проверить  $A^T A = E$ ).

Ответ:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

**Задача 4.** Линейный оператор  $\varphi: V_3 \rightarrow V_3$  действует как симметрия относительно плоскости

$$x + 2y - z = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Убедиться, что полученная матрица ортогональна (проверить  $A^T A = E$ ).

Ответ:  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

**Задача 5.** В базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  линейный оператор  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$  и в базисе  $\{3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ .

Ответ:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ -35 & -25 \end{pmatrix}.$

**Задача 6.** В базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  линейный оператор  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$  и в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$ .

Ответ:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

**Задача 7.** Линейный оператор  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  имеет в базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все векторы, которые при отображении  $\varphi$  переходят в вектор  $6\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ .

Ответ: Только  $\mathbf{x} = (0, 1, 1)^T$ .