Семинар 15. Собственные значения линейного оператора. Диагонализация матриц

§1. Собственные значения линейного оператора

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор. Ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ называется *собственным вектором* оператора A, если

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$. При этом λ называется *собственным значением* (собственным числом) оператора A, отвечающим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Задача 1. Докажите, что множество

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{L} : \quad A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

является подпространством линейного пространства $\mathcal{L}$.

Указание к решению: Достаточно проверить замкнутость этого множества относительно операций сложения векторов и умножения их на элемент поля $\mathbb{F}$.

Как можно найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора? Из уравнения $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ следует $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$, где E — единичная матрица того же размера, что и матрица линейного оператора A. Значит, матрица $A - \lambda E$ является левым делителем нуля в пространстве всех матриц рассматриваемого размера, а значит, она вырождена. Таким образом, получаем следующее уравнение для нахождения собственных чисел линейного оператора A:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Если найдены собственные числа λ_i линейного оператора с матрицей A, то для нахождения собственных векторов, соответствующих этим собственным числам, нужно найти нетривиальные решения $\boldsymbol{x}$ однородных систем линейных уравнений вида

$$(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = 0.$$

Матрица системы $A - \lambda_i E$ будет вырожденной в силу уравнения, из которого мы определяли собственные числа. Поэтому ранг этой матрицы меньше n, размерности пространства $\mathcal{L}$. Значит, у этой системы есть нетривиальные решения. Совокупность всех решений этой системы для заданного собственного числа λ_i образует линейное подпространство V_{λ_i}, которое называются *собственным подпространством* этого линейного оператора, отвечающим собственному числу λ_i.

Характеристическим многочленом матрицы A (или линейного оператора, имеющего матрицу A в некотором базисе) называется многочлен вида

$$\chi_\lambda = \det(A - \lambda E)$$

относительно λ, а *характеристическим уравнением* этой матрицы (или этого линейного оператора) называется уравнение вида $\chi_\lambda = 0$. Таким образом, собственные значения линейного оператора есть корни его характеристического многочлена. Можно показать, что характеристический многочлен линейного оператора не зависит от базиса, в котором записана матрица линейного оператора.

Задача 2. Доказать, что любой линейный оператор, действующий в пространстве V_3, имеет хотя бы одно собственное число и собственный вектор.

Указание к решению: Матрица линейного оператора, действующего в пространстве V_3, имеет размер 3. Значит, характеристическое уравнение этого линейного оператора есть алгебраическое уравнение третьего порядка, а любое алгебраическое уравнение третьего порядка имеет хотя бы одно действительное решение.

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение для этого линейного оператора:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в последнем выражении, получим квадратное уравнение вида

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Таким образом, линейный оператор A имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$. Для этого составим матрицу $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4-1 & -1 \\ -3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений этой системы образует вектор $\big(1, 3\big)^T$. Таким образом, собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda_1 = 1$, будет любой ненулевой вектор вида $c\big(1, 3\big)^T$.

Замечание. Кстати, фундаментальную систему решений однородной СЛАУ с матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

образует вектор $\big(b, -a\big)^T$ (или $\big(-b, a\big)^T$). Это помогает быстро находить собственные векторы матрицы размера 2.

Теперь найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 5$. Для этого составим матрицу $A - \lambda_2 E$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 4-5 & -1 \\ -3 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений этой системы образует вектор $\big(1, -1\big)^T$. Таким образом, собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda_2 = 5$, будет любой вектор вида $c\big(1, -1\big)^T$ при $c \neq 0$.

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение для этого линейного оператора:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (2-\lambda)\big(-\lambda(4-\lambda)+4\big)=(2-\lambda)^3=0.$$

Таким образом, единственным собственным числом этого линейного оператора является число $\lambda=2$. Найдем собственные векторы, соответствующие этому собственному значению. Составим матрицу $A-\lambda E$:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0-2 & 1 & 0\\ -4 & 4-2 & 0\\ -2 & 1 & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & \boxed{1} & 0\end{pmatrix}.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Все вектора такого вида при $C_1^2+C_2^2\neq 0$ являются собственными векторами, соответствующими собственному числу $\lambda=2$.

Замечание. В данном случае получилось, что размерность собственного подпространства, соответствующего собственному числу $\lambda=2$, равна 2. Это число называется *геометрической кратностью* этого собственного значения. Можно доказать, что алгебраическая кратность собственного значения (кратность числа $\lambda=2$ как корня характеристического уравнения) не меньше его геометрической кратности.

Совокупность всех собственных значений матрицы обладает некоторыми замечательными свойствами, например:

1) Произведение всех собственных значений (с учетом их алгебраических кратностей) равно определителю матрицы A.

2) Сумма всех собственных значений (с учетом их алгебраических кратностей) равна следу матрицы A.

Эти два свойства удобно использовать для контроля правильности нахождения собственных значений.

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы над полем $\mathbb{C}$ линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение для этого линейного оператора:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -\lambda(\lambda^2+1)=0.$$

Таким образом, собственные числа этой матрицы равны $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm i$. Свойства 1, 2, упомянутые выше, выполнены для этого набора собственных значений: $0\cdot i\cdot(-i)=0=\det(A)$, $0+i-i=0=\operatorname{tr}(A)$.

Теперь найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$. Составим матрицу $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственный вектор, соответствующий этому собственному числу, равен $C\big(1, 0, 0\big)^T$ при $C \neq 0$.

Теперь найдем комплекснозначные собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_{2,3} = \pm i$. Для $\lambda_2 = i$ получим

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \; \begin{matrix} 0 \\ -i \end{matrix} \right).$$

Собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, равен $C\big(0, i, 1\big)^T$ при $C \neq 0$.

Для $\lambda_3 = -i$ получим

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \; \begin{matrix} 0 \\ i \end{matrix} \right).$$

Собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, равен $C\big(0, -i, 1\big)^T$ при $C \neq 0$.

Замечание. Можно показать, что если все компоненты матрицы линейного оператора действительны и если известен собственный вектор $\boldsymbol{x}_\lambda$, отвечающий собственному значению $a + bi$, то для сопряженного собственного значения $a - bi$ собственный вектор будет равен $\overline{\boldsymbol{x}}_\lambda$, где каждая компонента является комплексно-сопряженной к соответствующей компоненте $\boldsymbol{x}_\lambda$.

§2. Диагонализация матриц

Задача 6. Найти матрицу линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в базисе из собственных векторов этого линейного оператора.

Решение: Составим характеристическое уравнение для этого линейного оператора:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 0-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0.$$

Таким образом, собственные числа этой матрицы равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$. При этом $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - 2 + 4 = 3 = \mathrm{tr}(A)$.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным числам.

1) $\lambda_1 = 1$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1-1 & -2 & -2 \\ -2 & 0-1 & 0 \\ -2 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим, что собственный вектор $\boldsymbol{x}_{\lambda_1}$, соответствующий этому собственному числу, равен $\big(1, -2, 2\big)^T$.

2) $\lambda_2 = -2$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1+2 & -2 & -2 \\ -2 & 0+2 & 0 \\ -2 & 0 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим, что собственный вектор $\boldsymbol{x}_{\lambda_2}$, соответствующий этому собственному числу, равен $\big(2, 2, 1\big)^T$.

2) $\lambda_3 = 4$.

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 1-4 & -2 & -2 \\ -2 & 0-4 & 0 \\ -2 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим, что собственный вектор $\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$, соответствующий этому собственному числу, равен $\big(-2, 1, 2\big)^T$.

Матрица перехода к базису из собственных векторов равна

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственные векторы попарно ортогональны. Значит, если взять вместо матрицы T матрицу

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

полученную из нормированных собственных векторов, то обратная к ней будет равна

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить матрицу в новом базисе, применим формулу $A' = S^{-1}AS$:

$$A' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получилось, что в базисе из собственных векторов матрица диагональна, при этом на главной диагонали находятся собственные числа.

Замечание. Конечно, это получилось не случайно. Из определения собственных векторов и равенства $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ очевидно, что если вектор $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу λ, то применение линейного оператора к вектору $\boldsymbol{x}$ дает умножение его на число λ.

Приведенное замечание дает первое важное применение собственных чисел: приведение матрицы линейного оператора к наиболее простому, диагональному виду. Однако сделать это можно не всегда. Если сумма размерностей собственных подпространств, соответствующих всех собственным числам, меньше размерности пространства, в котором действует этот линейный оператор (то есть суммарное количество линейно-независимых собственных векторов меньше размерности пространства), то у нас просто не хватит собственных векторов, которые могут образовывать базис пространства. Таким образом, *необходимое и достаточное условие приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду* можно сформулировать следующим образом: матрица линейного оператора приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда алгебраическая кратность каждого собственного значения совпадает с его геометрической кратностью. Линейный оператор, матрицу которого можно привести к диагональному виду, называется *полупростым.*

Задача 7. Выяснить, является ли линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ полупростым, если его матрица в некотором базисе равна

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Если да, то найти диагонализирующий базис и соответствующую диагональную форму матрицы линейного оператора.

Решение: Найдем собственные числа этого линейного оператора. Для этого составим его характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0 & 0.5 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\big((\lambda-0.5)^2 - 0.5^2\big) =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)^2 = 0.$$

Собственные числа этого линейного оператора равны $\lambda_1 = 0$ (с алгебраической кратностью 1), $\lambda_2 = 1$ (с алгебраической кратностью 2). Проверка с помощью следа матрицы дает $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 = \mathrm{tr}(A)$. Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным числам.

2) $\lambda_1 = 0$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0.5-0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1-0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственное подпространство V_{λ_1}, соответствующее этому собственному числу, одномерно. Базис собственного подпространства образует вектор $\boldsymbol{x}_{\lambda_1}$, соответствующий собственному числу λ_1. Он равен $\big(-1, 0, 1\big)^T$, геометрическая кратность корня λ_1 равна 1 и совпадает с его алгебраической кратностью.

2) $\lambda_2 = 1$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0.5-1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получим, что собственное подпространство V_{λ_2}, соответствующее этому собственному числу, двумерно и его образуют векторы вида

$$\boldsymbol{x}_{\lambda_2} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрическая кратность корня λ_2 равна 2 и совпадает с его алгебраической кратностью.

Таким образом, эту матрицу можно привести к диагональному виду. В базисе из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в этом можно, вычислив матрицу заданного линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Матрица перехода в этот базис равна

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Конечно, если выбрать базис

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, например,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то в нем матрица также имеет представленный вид. При составлении диагональной формы и диагонализирующего базиса нужно придерживаться следующего правила: если в качестве элемента D_{ii} диагональной формы выбираете собственное число λ, то вектор $\boldsymbol{e}_i$ нового базиса должен быть собственным вектором, соответствующим собственному числу λ.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полупрост ли этот линейный оператор? Если да, найти диагонализирующий базис и диагональную форму оператора.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Полупрост, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, матрица перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. В V_2 задан линейный оператор поворота на угол φ, $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2})$, вокруг начала координат. При каких значениях угла поворота существуют собственные значения и собственные векторы этого линейного оператора? Найти эти собственные значения.

Ответ: Только при $\varphi = 0$, $\lambda = 1$.

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полупрост ли этот линейный оператор? Если да, найти диагонализирующий базис и диагональную форму оператора.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Не полупрост.

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверить найденные собственные значения с помощью определителя и следа матрицы A. Полупрост ли этот линейный оператор? Если да, найти диагонализирующий базис и диагональную форму оператора.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$. Не полупрост.

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверить найденные собственные значения с помощью определителя и следа матрицы A. Полупрост ли этот линейный оператор? Если да, найти диагонализирующий базис и диагональную форму оператора.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Полупрост, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, матрица перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверить найденные собственные значения с помощью определителя и следа матрицы A. Полупрост ли этот линейный оператор? Если да, найти диагонализирующий базис и диагональную форму оператора.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Полупрост, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$, матрица перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 2+i & 2-i \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полупрост ли этот линейный оператор?

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_2 = -1$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. Не полупрост.

Задача 8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверить найденные собственные значения с помощью определителя и следа матрицы A. Полупрост ли этот линейный оператор?

Ответ: $\lambda_1 = 2$, $V_{\lambda_1} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$. Не полупрост.