Семинар 16. Жорданова нормальная форма линейного оператора

Итак, как мы знаем, не любой линейный оператор является полупростым, то есть не любая матрица приводится к диагональному виду. Однако можно найти максимально простой вид матрицы, отличный от диагонального. Такой максимально простой вид носит название жордановой нормальной формы и хорошая новость заключается в том, что матрица любого линейного оператора на полем $\mathbb{C}$ приводится к этой форме.

Жордановой клеткой называется квадратная матрица порядка k вида

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Например, жорданова клетка порядка 1 — это матрица $\begin{pmatrix} \lambda_0 \end{pmatrix}$, жорданова клетка порядка 2 — это матрица $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, жорданова клетка порядка 3 — это матрица $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ и так далее.

Говорят, что матрица имеет *жорданову нормальную форму*, если она является блочно-диагональной матрицей с жордановыми клетками на диагонали, то есть матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{k_m}(\lambda_m)} \end{pmatrix},$$

причем числа λ_i могут совпадать и жордановы клетки могут иметь одинаковые порядки, то есть $1 \le i \le m$, $1 \le m \le n$, где n — размерность линейного пространства, в котором задана матрица этого линейного оператора.

Таким образом, диагональные матрицы являются частным случаем жордановых нормальных форм при $k_1 = \dots = k_m = 1$.

§1. Жорданова нормальная форма линейного оператора с единственным собственным значением

Пусть характеристический многочлен матрицы линейного оператора имеет вид

$$\chi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n,$$

то есть имеет один корень кратности n. Тогда для нахождения жордановой нормальной формы матрицы можно применить следующий алгоритм.

Пусть m_1 — количество жордановых клеток размера 1, m_2 — количество жордановых клеток размера 2, m_l — количество жордановых клеток размера l, а клеток размера, большего l, жорданова нормальная форма не имеет. Для матрицы $A - \lambda_0 E$ можно рассмотреть ее h–тые степени $(A-\lambda_0 E)^h$ для $h = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$. Пусть r_h — ранг матрицы $(A - \lambda_0 E)^h$. Можно доказать, что имеют место следующие строгие неравенства

$$r_0 > r_1 > r_2 > \dots > r_l$$

и равенства

$$r_0 = n, \quad r_l = r_{l+1} = \ldots = r_n = r_{n+1} = 0.$$

Эти ранги единственным образом определяют числа m_h:

$$m_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}, \qquad h = 1, 2, \ldots, l.$$

Если $r_1 = 0$, то матрица жордановой нормальной формы диагональна с собственным числом λ_0 на диагонали для матриц любого порядка.

Запишем подробно возможные варианты жордановых нормальных форм, отличных от диагональной, для матриц небольших порядков. Будем считать, что характеристический многочлен имеет единственный корень λ_0.

1) Для матриц порядка 2 при $r_1 = 1$ жорданова нормальная форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

2) Для матриц порядка 3 есть 2 различных варианта жордановой нормальной формы:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 1, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 2.$$

3) Для матриц порядка 4 есть 4 варианта жордановой нормальной формы:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 1, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 2,\ r_2 = 1,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 2,\ r_2 = 0, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ при } r_1 = 3.$$

Для матриц пятого порядка можно записать уже 6 недиагональных вариантов жордановой нормальной формы, для матриц порядка 6 — 10 различных вариантов и так далее.

Замечание. Записанные варианты жордановых нормальных форм однозначны с точностью до перестановки блочных элементов главной диагонали. Например, матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем сначала собственные числа указанного линейного оператора.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \end{matrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\big((1-\lambda)(-3-\lambda)+4\big) = (-1-\lambda)\big(\lambda^2+2\lambda+1\big) = (-1-\lambda)^3.$$

Таким образом, единственным собственным значением линейного оператора является число

$$\lambda = -1.$$

Проверка с помощью следа матрицы дает $\operatorname{tr}(A) = -3+2-2 = -3 = 3\cdot\lambda$, что позволяет надеяться, что собственные значения были найдены верно. Тогда

$$A-\lambda E = A+E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $A+E$ равен $r_1 = 1$. Тогда в силу строгих неравенств на ранги матриц получим $r_2 = 0$. Кроме того, $r_0 = 3$. Поэтому

$$m_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 3 - 2 + 0 = 1,$$
$$m_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 1 - 0 + 0 = 1,$$

то есть жорданова нормальная форма линейного оператора имеет одну жорданову клетку порядка 1 и одну жорданову клетку порядка 2. Этого достаточно, чтобы выписать жорданову нормальную форму линейного оператора:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Задача 2. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем сначала собственные числа указанного линейного оператора.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 6 & 4 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ +2\cdot\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 6 & 4 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 4-2\lambda & 0\\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 6 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}+\lambda\cdot\mathrm{IV}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}0 & 6-3\lambda & 4-2\lambda & \lambda(2-\lambda)\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)^2\begin{vmatrix}0 & 3 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -3 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2\begin{vmatrix}3 & 2 & \lambda\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}-\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{matrix}=$$

$$=-(2-\lambda)^2\begin{vmatrix}2 & 0 & \lambda\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2\big(-4+2\lambda-\lambda^2+2\lambda\big)=(2-\lambda)^4.$$

Таким образом, характерический многочлен матрицы имеет единственный корень:

$$\lambda=2.$$

Проверка с помощью следа матрицы подтверждает правильность расчетов: $\mathrm{tr}(A)=0+4+2+2=8=4\cdot\lambda$. Тогда

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}+2\cdot\mathrm{IV}\\ +2\cdot\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $A-2E$ равен $r_1=2$. Найдем квадрат этой матрицы:

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & -8 & 8\\ 2 & -2 & -4 & 4\\ -1 & 1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $(A-2E)^2$ равен $r_2=1$. Значит, $r_3=0$ в силу строгих неравенств на ранги матриц. Кроме того, $r_0=4$, $r_4=0$. Тогда

$$\begin{aligned}m_1&=r_0-2r_1+r_2=4-4+1=1,\\ m_2&=r_1-2r_2+r_3=2-2+0=0,\\ m_3&=r_2-2r_3+r_4=1-0+0=1,\end{aligned}$$

что означает, что матрица жордановой формы имеет одну жорданову клетку порядка 1 и одну жорданову клетку порядка 3. Значит, жорданова нормальная форма данной матрицы имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\boxed{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Замечание. Конечно, жорданову нормальную форму можно записать и в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right).$$

§2. Жорданова нормальная форма линейного оператора с различными собственными значениями

В случае, когда характеристический многочлен матрицы имеет несколько корней, для каждого из найденных собственных значений можно применить вышеизложенный алгоритм. А именно, пусть k есть алгебраическая кратность собственного значения λ_0 и r_h есть ранг матрицы $(A-\lambda_0 E)^h$ для $h = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$. Тогда существует такое натуральное l, $0 \leq l \leq k$, что имеют место следующие неравенства

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_l$$

и равенства

$$r_0 = n, \quad r_l = r_{l+1} = r_{l+2} = \cdots = r_k = r_{k+1} = n - k.$$

Пусть m_h равно числу жордановых клеток порядка h с собственным значением λ_0 на диагонали. Тогда для собственного значения λ_0 ранги r_i единственным образом определяют числа m_h по такой же формуле, что и для единственного собственного значения:

$$m_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}, \qquad h = 1, 2, \ldots, k.$$

Задача 3. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Как обычно, найдем собственные значения матрицы (вычисления опускаю):

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)^2.$$

Значит, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, причем их кратности равны двум.

Рассмотрим сначала собственное значение $\lambda_1 = 0$. Легко найти ранг матрицы $A = A - \lambda_1 E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Значит, ранг r_1 матрицы A равен 3. Алгебраическая кратность корня $k = 2$, поэтому $r_2 = r_3 = 2$. Значит,

$$m_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 4 - 6 + 2 = 0,$$
$$m_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 3 - 4 + 2 = 1,$$

значит, собственное значение $\lambda_1 = 0$ дает одну жорданову клетку размером 2.

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = -2$. Найдем ранг матрицы $A + 2E$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, ранг r_1 матрицы $A + 2E$ равен двум: $r_1 = 2$. Так как алгебраическая кратность собственного значения равна двум, то $r_2 = r_3 = 4 - 2 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= r_0 - 2r_1 + r_2 = 4 - 4 + 2 = 2, \\ m_2 &= r_1 - 2r_2 + r_3 = 2 - 4 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Значит, имеется две клетки первого порядка с $\lambda_2 = -2$ на главной диагонали. Следовательно, жорданова нормальная форма линейного оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

§3. Минимальный многочлен линейного оператора

Многочлен $p(\lambda)$ называется *аннулирующим многочленом* линейного оператора A, если $p(A) = 0$. Известным примером аннулирующего многочлена является характеристический многочлен линейного оператора (это утверждение называется теоремой Гамильтона - Кэли). Однако помимо характеристического, у линейного оператора есть и другие аннулирующие многочлены.

Минимальным многочленом линейного оператора A называется анннулирующий многочлен этого линейного оператора, удовлетворяющий двум условиям:

1) Старший коэффициент многочлена равен 1 (такой многочлен называется приведенным),

2) Степень этого многочлена минимальна среди всех аннулирующих многочленов этого линейного оператора.

Есть несколько способов поиска минимального многочлена. В контексте этого семинара самым интересным (и наиболее простым) оказывается способ поиска минимального многочлена с помощью жордановой нормальной формы этого линейного оператора. Можно доказать, что минимальный многочлен линейного оператора равен

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — собственные числа линейного оператора, k_i — **максимальный** размер жордановой клетки, на главной диагонали которой находится число λ_i.

Задача 4. Найти минимальный многочлен линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и убедиться, что он является аннулирующим.

Решение: Найдем собственные числа матрицы этого линейного оператора:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{III}\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}-(1-\lambda)\cdot\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & \lambda & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}+\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=3\lambda^2-\lambda^3=0$$

Следовательно, собственными числами линейного оператора являются $\lambda_1=0$ (кратности 2) и $\lambda_2=3$ (кратности 1). С помощью следа матрицы можно проверить найденные собственные значения. Чтобы найти минимальный многочлен, найдем жорданову нормальную форму линейного оператора.

Рассмотрим сначала собственное значение $\lambda_1=0$. Ранг матрицы A равен $r_1=1$. Поскольку кратность корня равна 2, заключаем, что $r_2=3-2=1$. Кроме того, $r_0=3$, $r_2=r_3=1$, что дает

$$m_1=r_0-2r_1+r_2=3-2+1=2,$$
$$m_2=r_1-2r_2+r_3=1-2+1=0.$$

Значит, жорданова нормальная форма имеет две клетки с $\lambda_1=0$ на диагонали.

Кратность корня $\lambda_2=3$ равна 1, а значит, это собственное значение дает одну жорданову клетку с числом $\lambda_2=3$ на главной диагонали. Таким образом, жорданова нормальная форма данного линейного оператора диагональна и равна

$$\begin{pmatrix}\boxed{0} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{0} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{3}\end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1=0$ максимальный размер жордановой клетки равен 1, для $\lambda_2=3$ максимальный размер жордановой клетки также равен 1. Следовательно, минимальный многочлен имеет вид

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-3\lambda.$$

Убедимся, что этот многочлен является аннулирующим. Вычислим квадрат матрицы:

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$p(A)=A^2-3\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0.$$

Задача 5. Выписать минимальные многочлены линейных операторов из задач 1–3.

Решение: В задаче 1 единственным собственным значением было число $\lambda_1=-1$, а жорданова нормальная форма имела вид

$$\begin{pmatrix}\boxed{-1} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Максимальный размер жордановой клетки для $\lambda_1 = -1$ равен 2, откуда заключаем, что минимальный многочлен равен

$$p_1(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$$

В задаче 2 единственным собственным значением было число $\lambda_1 = 2$, а жорданова нормальная форма имела вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Максимальный размер жордановой клетки для $\lambda_1 = 2$ равен 3, откуда заключаем, что минимальный многочлен равен

$$p_2(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

В задаче 3 линейный оператор имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, а жорданова нормальная форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}.$$

Максимальный размер жордановой клетки с числом $\lambda_1 = 0$ на главной диагонали равен 2, а максимальный размер жордановой клетки с числом $\lambda_2 = -2$ на главной диагонали равен 1, откуда минимальный многочлен равен

$$p_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2(\lambda + 2).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы и убедиться, что он является аннулирующим.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

Задача 2. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$.

Задача 3. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора[1] $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.

Задача 4. Найти жорданову нормальную форму линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2$.

[1]Этот линейный оператор была дана в качестве задания для самостоятельного решения в семинаре 15. Можете воспользоваться результатом и не находить собственные значения этой матрицы повторно.