Семинар 17. Инвариантные подпространства линейных операторов

Подпространство U векторного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *инвариантным подпространством* линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, если $\varphi(\boldsymbol{x}) \in U$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in U$. Очевидным образом линейный оператор φ определяет линейный оператор $\varphi_{|U}\colon U \to U$:

$$\forall \boldsymbol{x} \in U \ \varphi_{|U}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

линейного оператора $\varphi_{|U}$ называется *ограничением* линейного оператора φ на инвариантное подпространство U.

Задача 1. Докажите, что если U и W являются инвариантными подпространствами линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, то $U \cap W$ и $U + W$ также будут инвариантными подпространствами для φ.

Указание к решению: Для доказательства того, что $U \cap W$ будет инвариантным подпространством, достаточно воспользоваться определением инвариантного подпространства для произвольного $x \in U \cap W$. Для доказательства того, что $U + W$ будет инвариантным подпространством, достаточно рассмотреть $\alpha x + \beta y$, α, $\beta \in F$, $x \in U$, $y \in W$, воспользоваться линейностью оператора и опеделением инвариантных подпространств линейного оператора.

Задача 2. Докажите, что для любого линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ подпространства $\{\mathbf{0}\}$, $\mathcal{L}$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ являются инвариантными подпространствами.

Указание к решению: Для подпространств $\{\mathbf{0}\}$ и V требуемое очевидно, для $\mathrm{Ker}(\varphi)$ и $\mathrm{Im}(\varphi)$ достаточно вспомнить определения ядра и образа соответственно.

Задача 3. Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — подпространство в $\mathcal{L}$ и $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор.

а) Докажите, что если $U \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, то U — инвариантное подпространство линейного оператора φ.

б) Докажите, что если $\mathrm{Im}(\varphi) \subset U$, то U — инвариантное подпространство линейного оператора φ.

Указание к решению: Воспользуйтесь результатом прошлой задачи.

Помимо очевидных примеров ($\{\mathbf{0}\}$, $\mathcal{L}$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$), линейный оператор может иметь и множество других инвариантных подпространств. Например, для оператора гомотетии с коэффициентом λ любое подпространство является инвариантным.

§1. Нахождение инвариантных подпространств линейного оператора над множеством действительных значений

Основное преимущество использования инвариантных подпространств заключается в нахождении базиса, в котором матрица линейного оператора имеет наиболее простой вид. Мы уже знаем, что если сумма размерностей собственных подпрострасть равна n, то существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Однако диагонализация матрицы линейного оператора возможна не всегда.

Пусть $\dim \mathcal{L} = n$ и U — k-мерное инвариантное подпространство линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $k \leq n$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис пространства $\mathcal{L}$, причём векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ образуют базис подпространства U. Тогда матрица линейного оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A \in M_k(\mathbb{F})$, $B \in M_{n-k}(\mathbb{F})$, $C \in M_{k\times(n-k)}(\mathbb{F})$, $0 \in M_{(n-k)\times k}$, причём матрица A служит матрицей ограничения $\varphi_{|U}$ линейного оператора φ на U в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Обратно, если относительно некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ матрица оператора φ имеет указанный блочный вид, причем A — квадратная матрица порядка k, то $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ — инвариантное подпространство для φ.

При этом, если U — инвариантное подпространство линейного оператора φ, то характеристический многочлен ограничения $\varphi_{|U}$ φ на U делит характеристический многочлен φ: $\chi_{\varphi_{|U}} \,|\, \chi_\varphi$.

Более сильный результат состоит в том, что если $\mathcal{L} = U \oplus W$, причем U и W — инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, а системы $\boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{e}''$ образуют базисы подпространств U и W соответственно, то матрица линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'')$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

и матрица A служит матрицей ограничения $\varphi_{|U}$ линейного оператора φ на U, а матрица B — матрицей ограничения $\varphi_{|W}$ линейного оператора φ на W.

Задача 4. Найти все инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из собственных векторов имеет диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

с *различными* собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали.

Решение: Очевидно, что характеристический многочлен φ равен

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda).$$

Пусть U — инвариантное подпространство размерности k данного линейного оператора. Так как характеристический многочлен ограничения линейного оператора φ на U обязан делить многочлен $\chi_A(\lambda)$, многочлен $\chi_{\varphi_{|U}}(\lambda)$ может быть только произведением k множителей вида $\lambda_i - \lambda$. Чтобы не усложнять обозначения, предположим, что

$$\chi_{\varphi_{|U}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda).$$

Это означает, что линейный оператор $\varphi_{|U}$ имеет k различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Но каждому собственному числу соответствует хотя бы один собственный вектор, и, с другой стороны, ясно, что любой собственный вектор линейного оператора $\varphi_{|U}$ будет в то же время и собственным вектором самого φ. Но φ имеет лишь один (с точностью до пропорциональности) собственный вектор, отвечающий λ_i — это $\boldsymbol{e}_i$. Отсюда мы заключаем, что векторы $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, k$, принадлежат подпространству U. Эти векторы линейно независимы, а размерность U равна k. Следовательно, подпространство U порождается векторами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

К инвариантным подпространствам вида

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

нужно добавить нулевое подпространство $\{\mathbf{0}\}$, которое является инвариантным для любого оператора.

Задача 5. Найти все инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Собственными значениями этого линейного оператора являются числа $\lambda_1 = 1$ (алгебраическая кратность корня равна 1) и $\lambda_2 = 2$ (алгебраическая кратность корня равна 2). Найдем собственные векторы линейного оператора.

1) $\lambda_1 = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right).$$

Считая переменную x_3 свободной и полагая $x_3 = 1$, а переменные x_1, x_2 — базисными, получим следующий собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_1:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, получим

$$x_1 = c_1 - c_2,$$

откуда общее решение однородной СЛАУ с матрицей $A - 2E$ имеет вид:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, геометрическая кратность корня $\lambda_2 = 2$ равна 2. Это будет означать и то, что матрица A допускает представление в диагональном виде в базисе, состоящем из собственных векторов этого линейного оператора. Пусть

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь опишем все инвариантные подпространства этого линейного оператора. Очевидно, $\{\mathbf{0}\}$ является единственным нульмерным инвариантным подпространством, $\mathbb{R}^3$ — единственным трехмерным инвариантным подпространством. Все одномерные инвариантные подпространства имеют вид $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_i\}$, где $i = 1, 2, 3$. Двумерными инвариантными подпространствами являются, во-первых, $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, а во-вторых, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}\}$, где

$\boldsymbol{a} \in U$. Последнее инвариантное подпространство имеет именно такую структуру, потому что любой вектор $\boldsymbol{a} \in U$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 2$, а потому описание $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ было бы недостаточным.

§2. Комплексификация линейного оператора

Как мы знаем, линейный оператор на действительном векторном пространстве может не иметь собственных чисел и векторов, а значит и одномерных инвариантных подпространств. Для исследования вопроса об инвариантных подпространствах в этом случае нам потребуется понятие комплексификации действительного векторного пространства и линейного оператора.

Пусть $\mathcal{L}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. По аналогии с определением комплексного числа определим множество $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ как множество всех упорядоченных пар $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ пространства $\mathcal{L}$, которые мы будем записывать как $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \{\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{L}\}.$$

Операцию сложения элементов множества $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ определим как сложение векторов прямой суммы пространств формулой

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}' + i\boldsymbol{v}' \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') + i(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'),$$

а умножение на комплексные числа формулой

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{x} = (a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) + i(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}).$$

Полученная алгебраическая структура $(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}, +, \lambda\cdot)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Пространство $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* действительного векторного пространства $\mathcal{L}$. Продолжая аналогию с комплексными числами, условимся писать $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ и называть вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$ *сопряжённым* к вектору $\boldsymbol{x}$.

Пусть теперь задан линейный оператор $\varphi \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Определим отображение $\varphi_{\mathbb{C}} \colon \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ формулой

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}) + i\varphi(\boldsymbol{v}).$$

Отображение $\varphi_{\mathbb{C}}$ является линейным оператором на пространстве $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ и называется *комплексификацией линейного оператора* φ. Заметим, что если φ имеет матрицу A в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathcal{L}$, то $\varphi_{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу A в базисе $\boldsymbol{e}_1 + i\,\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{e}_n + i\,\boldsymbol{0}$ пространства $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$. В частности, линейный оператор φ и его комплексификация имеют одинаковые характеристические многочлены.

Пусть $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$ — комплексное собственное число комплексификации $\varphi_{\mathbb{C}}$ линейного оператора φ, определённого на конечномерном действительном векторном пространстве $\mathcal{L}$, а $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ — соответствующий собственный вектор $\varphi_{\mathbb{C}}$. Тогда $\bar{\lambda} = a - ib$ также будет собственным числом линейного оператора $\varphi_{\mathbb{C}}$, а отвечающим ему собственным вектором будет $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$. Более того, векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ линейно независимы и порождают двумерное инвариантное подпространство φ. Матрицей ограничения φ на это подпространство служит $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Таким образом, в случае, когда характеристический многочлен оператора φ обладает комплексным корнем, который не является вещественным, φ имеет двумерное инвариантное подпространство.

Задача 6. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который задан в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -6 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем собственные значения этого линейного оператора (вычисления опущены):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 4 \\ -6 & -3-\lambda & 7 \\ 0 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+10).$$

Действительный линейный оператор φ имеет лишь одно собственное число $\lambda_1 = -2$, в то время как его комплексификация $\varphi_{\mathbb{C}}$ имеет ещё два комплексно сопряжённых собственных числа $\lambda_2 = -1-3i$ и $\lambda_3 = -1+3i$ (это комплексные корни квадратного уравнения $\lambda^2+2\lambda+10 = 0$).

Несложно убедиться, что числу $\lambda_1 = -2$ отвечает один собственный вектор, а именно

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём теперь собственные векторы комплексификации $\varphi_{\mathbb{C}}$, отвечающие собственному числу $\lambda_2 = -1-3i$. Имеем:

$$A + (1+3i)E = \begin{pmatrix} -3+3i & -2 & 4 \\ -6 & -2+3i & 7 \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3-3i) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 6+6i & -12-12i \\ -6 & -2+3i & 7 \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} +3\cdot\mathrm{II} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & 15i & 9-12i \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{i}{3} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & -5 & 4+3i \\ 0 & -5 & 4+3i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{5}) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2-3i & -7 \\ 0 & 1 & -4/5-(3/5)i \end{pmatrix}.$$

Далее мы вычтем из первой строки вторую, умноженную на $2-3i$. Вычислим сначала значение выражения

$$-7 + (2-3i)(4/5+(3/5)i) = -7 + \frac{1}{5}(2-3i)(4+3i) = -7 + \frac{1}{5}(17-6i) = -\frac{18}{5} - \frac{6}{5}i.$$

После указанного преобразования матрицы получим:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -18/5-(6/5)i \\ 0 & 1 & -4/5-(3/5)i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{6} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} -3/5-(1/5)i \\ -4/5-(3/5)i \end{matrix} \right).$$

Отсюда, придавая свободной третьей переменной значение 5, находим собственный вектор

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда в качестве собственного вектора, отвечающего $\lambda_3 = -1 + 3i$, достаточно взять сопряжённый вектор к вектору $\boldsymbol{f}_2$:

$$\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 - i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда линейный оператор φ имеет двумерное инвариантное подпространство, порождённое действительной

$$\boldsymbol{u} = (3, 4, 5)^T$$

и мнимой

$$\boldsymbol{v} = (1, 3, 0)^T$$

частями вектора $\boldsymbol{f}_2$. Матрицей ограничения φ на это подпространство в базисе $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ будет

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрицей самого φ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ —

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить результат, найдем матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

обратная к которой равна

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $A' = S^{-1}AS$ получаем

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -6 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Значит, в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ матрица действительно имеет указанный вид.

Таким образом, линейный оператор имеет два нетривиальных (отличных от $\{\mathbf{0}\}$ и $\mathbb{R}^3$) инвариантных подпространства: одномерное $L = \operatorname{span}\{\boldsymbol{f}_1\}$ и двумерное $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

Задача 7. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, можно ли матрицу привести к диагональному виду путем перехода к новому базису над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если да, то найти этот базис и соответствующий вид матрицы.

Решение: Найдем собственные числа этой матрицы. Составим и решим характеристическое уравнение (вычисления опущены):

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 7 & -5\\ -4 & 5-\lambda & 0\\ 1 & 9 & -4-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+13)=0.$$

Собственные числа этой матрицы равны $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=2\pm 3i$. Значит, этот линейный оператор имеет одномерное и двумерное инвариантные подпространства.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=2\pm 3i$.

1) $\lambda_1=1$.

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}4-1 & 7 & -5\\ -4 & 5-1 & 0\\ 1 & 9 & -4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -5\\ -4 & 4 & 0\\ 1 & 9 & -5\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{c|c|c}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}}\end{array}\right).$$

Получим, что собственный вектор $\boldsymbol{e}_1$, соответствующий этому собственному числу, равен

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_{2,3}=2\pm 3i$. Рассмотрим $\lambda=2+3i$.

$$A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}4-2-3i & 7 & -5\\ -4 & 5-2-3i & 0\\ 1 & 9 & -4-2-3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3i & 7 & -5\\ -4 & 3-3i & 0\\ 1 & 9 & -6-3i\end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что комплекснозначный собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda=2+3i$, равен

$$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}3-3i\\4\\5-3i\end{pmatrix}.$$

Для комплексно сопряжённого собственного числа $\lambda=2-3i$, собственный вектор равен

$$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}3+3i\\4\\5+3i\end{pmatrix}.$$

В базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ над полем комплексных чисел матрица A имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2+3i & 0\\ 0 & 0 & 2-3i\end{pmatrix}.$$

Кроме того, линейный оператор φ имеет двумерное инвариантное подпространство, порождённое действительной

$$\boldsymbol{u}=(3,4,5)^T$$

и мнимой

$$\boldsymbol{v}=(-3,0,-3)^T$$

частями вектора $\boldsymbol{e}_2$. Матрицей ограничения φ на это подпространство в базисе $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ будет

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

а матрицей самого φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ —

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки результата запишем матрицу перехода от канонического базиса пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

обратная к которой равна

$$S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $A' = S^{-1}AS$ получаем

$$A' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Значит, в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ матрица действительно имеет указанный вид.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)^T$.

Задача 2. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_3\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 2, -1)^T$.

Задача 3. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_3\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}\}$, где $\boldsymbol{a} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \neq \mathbf{0}$, а также $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (2, 1, 1)^T$.

Задача 4. Найти инвариантные подпространства линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 8 & -24 & 19 \\ 10 & -32 & 26 \end{pmatrix}.$$

Выписать матрицу ограничения линейного оператора.

Ответ: $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$, $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, 2)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 3, 4)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (4, 1, 0)^T$, матрица ограничения $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.