Семинар 18. Жорданов базис линейного оператора

Жордановым базисом называется базис, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову нормальную форму. По теореме о жордановой нормальной форме такой базис всегда существует. Есть разные способы нахождения жорданова базиса. Я рассмотрю способ, заключающийся в нахождении так называемых присоединенных (корневых) векторов. Стратегия действий для нахождения жорданова базиса заключается в том, чтобы разбить все пространство $\mathcal{L}$ в прямую сумму подпространств

$$\mathcal{L} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \cdots \oplus V_r, \quad \dim V_j = m_j,$$

инвариантных относительно линейного оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$: $A(V_j) \subset V_j$. При этом V_j обязательно будет включать собственные векторы, соответствующие собственному числу λ_j, но, помимо них, и некоторые другие векторы, если геометрическая кратность собственного значения меньше его алгебраической кратности.

Для того, чтобы разобраться, какие еще другие векторы нам понадобятся, рассмотрим жорданову клетку, например, третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

В каком базисе может быть записана такая матрица? По столбцам этой матрицы записан результат действия линейного оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ на базис. Обозначим этот базис $\big(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\big)$. Тогда

$$A\boldsymbol{v} = \lambda_0 \boldsymbol{v}, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_0 E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \tag{1}$$
$$A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} + \lambda_0 \boldsymbol{f}, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_0 E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}, \tag{2}$$
$$A\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} + \lambda_0 \boldsymbol{g}, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_0 E)\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}. \tag{3}$$

Уравнение (1), как мы уже знаем, задает собственный вектор $\boldsymbol{v}$, соответствующий собственному значению λ_0. Значит, первый вектор жорданова базиса — это собственный вектор $\boldsymbol{v}$, соответствующий собственному значению λ_0. Домножая уравнение (2) на матрицу $(A - \lambda_0 E)$ слева, получим

$$(A - \lambda_0 E)^2 \boldsymbol{f} = (A - \lambda_0 E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_0 E)^2 \boldsymbol{f} = \mathbf{0}.$$

Значит, второй вектор жорданова базиса есть решение уравнения $(A - \lambda_0 E)^2 \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

Присоединенным (корневым) вектором высоты m называется вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий уравнению $(A - \lambda_0 E)^m \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Например, собственный вектор — это присоединенный вектор высоты 1.

Таким образом, второй вектор жорданова базиса — это присоединенный вектор высоты 2. Аналогично, домножая уравнение (3) на матрицу $(A - \lambda_0 E)^2$ слева, получим

$$(A - \lambda_0 E)^3 \boldsymbol{g} = (A - \lambda_0 E)^2 \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_0 E)^3 \boldsymbol{g} = \mathbf{0}.$$

Получим, что третий вектор жорданова базиса — это присоединенный вектор высоты 3.

Таким образом, для нахождения жорданова базиса достаточно найти собственные и присоединенные векторы, суммарное количество которых равно алгебраической кратности корня λ_0. Однако все не так просто. Для некоторых собственных векторов уравнения

(2), (3) могут быть не совместны. Поэтому при нахождении присоединенных векторов первым шагом является исследование совместности СЛАУ при помощи критерия Кронекера-Капелли.

§1. Жорданов базис линейного оператора с единственным собственным значением

Рассмотрим линейный оператор $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n,$$

то есть сначала рассмотрим случай, когда линейный оператор имеет единственное собственное значение λ_0 алгебраической кратности n.

Приведу алгоритм построения жорданова базиса. В этом алгоритме для нахождения базиса не нужно заранее знать жорданову нормальную форму этого линейного оператора. Более того, алгоритм позволяет одновременно построить и жорданов базис, и жорданову нормальную форму этого линейного оператора.

1) Находим в общем виде собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ_0:

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{\alpha_1} + \dots + c_r\boldsymbol{\alpha_r},$$

где r — геометрическая кратность собственного значения λ_0, $c_1, \dots, c_r$ — произвольные постоянные. При этом жорданова нормальная форма имеет ровно r жордановых клеток. Каждый базисный вектор собственного подпространства дает старт новой цепочке векторов, в базисе из которых матрица ограничения линейного оператора на подпространство, натянутое на эти векторы, имеет вид жордановой клетки. Для того, чтобы построить жорданов базис, нужно найти еще $n - r$ присоединенных векторов.

2) Исследуем совместность системы

$$(A - \lambda_0 E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{\alpha_1} + \dots + c_r\boldsymbol{\alpha_r}. \tag{4}$$

При этом может получиться так, что система совместна не при любых значениях $c_1, \dots, c_r$, а на коэффициенты $c_1, \dots, c_r$ накладываются некоторые линейные ограничения:

$$f_1(c_1, \dots, c_r) = 0, \quad \dots \quad f_{r-k}(c_1, \dots, c_r) = 0.$$

Каждый линейно-независимый набор переменных $c_1, \dots, c_r$ дает старт новой цепочки векторов, однако если для некоторого фиксированного набора $c_{10}, \dots, c_{r0}$ не выполняются написанные выше ограничения, нельзя получить соответствующие присоединенные векторы, поэтому такие цепочки имеют длину 1 (то есть содержат только один вектор).

3) В записи вектора $\boldsymbol{v}$ среди переменных $c_1, \dots, c_r$ оставляем только свободные переменные $c_1, \dots, c_k$, $k \le r$, выражая базисные переменные через свободные с помощью соотношений, полученных при исследовании СЛАУ на совместность.

4) Решая неоднородную СЛАУ

$$(A - \lambda_0 E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v},$$

где вектор $\boldsymbol{v}$ выражен через свободные переменные $c_1, \dots, c_k$, получаем запись присоединенного вектора высоты 2 в виде

$$\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{\beta_1} + \dots + c_k\boldsymbol{\beta_k} + c_{r+1}\boldsymbol{\beta_{k+1}} + \dots + c_{2r}\boldsymbol{\beta_{r+k}},$$

который зависит от свободных переменных $c_1, \dots, c_k$ и еще некоторых "новых постоянных-$c_{r+1}, \dots, c_{2r}$.

5) Исследуем совместность СЛАУ

$$(A - \lambda_0 E)\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}. \tag{5}$$

Опять может получиться так, что для совместности СЛАУ необходимо выполнение некоторых соотношений на переменные $c_1, \dots, c_k$, $c_{r+1}, \dots, c_{2r}$.

Набор переменных $c_1, \dots, c_k$, $c_{r+1}, \dots, c_{2r}$, при которых не выполняются эти соотношения, дают цепочки длины 2, а при выполнении условий совместности СЛАУ можно найти присоединенный вектор высоты 3, решая систему (5).

6) Процесс продолжаем до тех пор, пока суммарное количество собственных и присоединенных векторов не станет равным алгебраической кратности n собственного значения λ_0.

7) Придавая константам $c_1, \dots, c_r$, $c_{r+1}, \dots, c_{2r}, \dots$ различные наборы значений, получаем численное значение векторов жорданова базиса. Жорданов базис при этом записывается в виде:

$$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{g_1}, \dots; \quad \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{f_2}, \dots; \quad \boldsymbol{v_3}, \dots,$$

то есть в виде последовательности нескольких цепочек векторов различной длины. Размерность жордановой клетки J_i будет равна длине i-той цепочки. Записывая полученные жордановы клетки в блочно-диагональную матрицу, получаем жорданову нормальную форму.

Применим вышеизложенный алгоритм для решения некоторых задач.

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Характеристический многочлен этого линейного оператора равен

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0.$$

Таким образом, алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна 2. Найдем собственное подпространство. Для этого сначала выпишем матрицу $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, значит, размерность собственного подпространства равна $2 - 1 = 1$, то есть можно получить единственный линейно независимый собственный вектор, который запишем в виде

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для построения жорданова базиса не хватает одного присоединенного вектора. Исследуем совместность системы $(A - E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & c_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 0 & c_1 \end{array}\right).$$

Система совместна при любом c_1. Выбирая x_1 в качестве базисной переменной, получаем запись присоединенного вектора высоты 2 в виде

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} c_1/2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, суммарное количество собственных и присодиненных векторов стало равно 2, и дальнейшие присоединенные векторы можно не находить.

Положим

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 0.$$

Значит, жорданов базис образует единственная цепочка векторов

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

в которой $\boldsymbol{v}_1$ — собственный вектор, $\boldsymbol{f}_1$ — присоединенный вектор высоты 2.

Поскольку жорданов базис образует единственная цепочка векторов длины 2, жорданова нормальная форма состоит из единственной жордановой клетки размером 2:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим найденный результат. Матрица перехода к новому базису равна

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в указанном базисе матрица линейного оператора действительно имеет жорданову нормальную форму указанного вида.

Задача 2. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Единственное собственное число этого линейного оператора равно $\lambda_1 = -1$, оно имеет кратность 3 (вычисления опускаю). Найдем собственные векторы. Сначала выпишем матрицу $A - \lambda_1 E = A + E$:

$$A + E = \begin{pmatrix} -1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1+1 & -2 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|cc|} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Ранг этой матрицы равен 2, а значит, размерность собственного подпространства равна $3 - 2 = 1$, то есть можно найти единственный собственный вектор. Значит, придется находить еще 2 присоединенных вектора. Причем, поскольку геометрическая кратность корня равна 1, жорданова нормальная форма имеет единственную жорданову клетку. Собственное подпространство имеет вид

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2. Для этого сначала исследуем совместность СЛАУ

$$(A+E)\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}} \Bigg\| \begin{matrix} c_1 \\ 0 \end{matrix} \right).$$

Система совместна при любых значениях постоянной c_1, а ее общее решение имеет вид

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 3. Для этого сначала исследуем совместность СЛАУ

$$(A+E)\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & -2 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Опять получили, что система совместна при любых c_1, c_2, а ее общее решение записывается в виде

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} c_3 \\ -c_2 \\ c_1/2 \end{pmatrix}.$$

Суммарное число собственных и присоединенных векторов равно 3, а значит, другие векторы можно не находить. Положим

$$c_1=2, \quad c_2=c_3=0,$$

получим жорданов базис

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

который представляет собой единственную цепочку векторов длины 3. Значит, жорданова нормальная форма имеет единственную клетку

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки достаточно вычислить $T^{-1}AT$, где матрица T равна

$$T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Единственное собственное число этого линейного оператора равно $\lambda_1 = 1$, оно имеет кратность 3 (вычисления, как обычно, опускаю). Найдем собственные векторы. Сначала выпишем матрицу $A - \lambda_1 E = A - E$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $A - E$ равен 1, значит, размерность собственного подпространства равна $3-1 = 2$, что значит, что жорданов базис образуют две цепочки векторов, одна из которых имеет длину 2, а другая — длину 1. Собственные векторы указанного линейного оператора имеют вид

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенные векторы высоты 2. Для этого исследуем совместность СЛАУ

$$(A - E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|l} -1 & 1 & 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \\ -1 & 1 & 1 & c_2 \end{array}\right).$$

Очевидно, что система совместна при

$$c_1 = 0$$

и любом c_2. Полагая свободные переменные $x_2 = c_3$, $x_3 = c_4$, получим, что при указанном условии присоединенный вектор высоты 2 имеет вид

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

На этом поиск векторов можно прекратить, поскольку мы нашли 2 линейно независимых собственных вектора и один присоединенный вектор высоты 2, что достаточно для формирования базиса.

Для первой цепочки векторов положим

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$$

и отсюда получим

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта цепочка образована при выполнении условий совместности СЛАУ $(A - E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}$. Поскольку длина цепочки векторов равна 2, матрица ограничения линейного оператора на подпространство, натянутое на эти векторы, равна

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая цепочка векторов образована при невыполнении условий совместности СЛАУ $(A - E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}$. Тем не менее, полагать $c_1 = c_2 = 0$ нельзя, поскольку собственный вектор не может быть нулевым. Поэтому положим

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

и отсюда получим

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Длина этой цепочки равна 1, матрица ограничения линейного оператора имеет размер 1 и равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы о виде матрицы линейного оператора при разложении исходного пространства на прямую сумму инвариантных подпространств имеем, что жорданова нормальная форма линейного оператора состоит из двух жордановых клеток A_1, A_2 и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \end{pmatrix}.$$

Соответствующий жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода к этому базису равна

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

обратная к ней равна

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формуле изменения матрицы линейного оператора при замене базиса

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

что подтверждает правильность расчетов.

Задача 4. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этого линейного оператора.

Решение: Единственное собственное число этого линейного оператора равно $\lambda_1 = 2$, его алгебраическая кратность равна четырем[1]. Найдем собственные векторы этого линейного оператора, для этого составим сначала матрицу $A - \lambda_1 E = A - 2E$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Это линейный оператор из домашнего задания к семинарам 15 и 16, поэтому вычисления опущены.

Ранг этой матрицы равен 2, значит, размерность собственного подпространства равна $4-2=2$, то есть к двум собственным векторам нужно добавить еще два присоединенных вектора. Найдем собственное подпространство в общем виде, решив однородную СЛАУ с матрицей $A-2E$. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{|cc|cc} \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}\right).$$

Полагая переменные $x_3=c_1$, $x_4=c_2$ свободными, получаем, что общее решение этой системы записывается в виде

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2, для этого исследуем совместность системы

$$(A-2E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2-c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2-c_1 \end{array}\right).$$

Значит, система совместна при

$$c_1 = c_2.$$

Число свободных c_i равно 1. Значит, при $c_1=c_2$ получим первую цепочку векторов, а при $c_1 \neq c_2$ — вторую цепочку векторов, длина которой равна 1 (поскольку для этой цепочки векторов не найдется соответствующих присоединенных векторов). Значит, длина первой цепочки должна быть равна 3, чтобы сумма длин всех цепочек была равна алгебраической кратности корня.

Положим $c_2=c_1$, тогда для нахождения присодиненных векторов получим систему

$$\left(\begin{array}{|cc|cc|l} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ \hline \end{array}\right).$$

Считаем переменные $x_3=c_3$, $x_4=c_4$ свободными. Отсюда получим

$$x_1 = -x_4 - c_1 = -c_1 - c_4, \quad x_2 = x_3 + c_1 = c_1 + c_3,$$

то есть общее решение системы записывается в виде

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -c_1-c_4 \\ c_1+c_3 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенного вектора высоты 3 исследуем совместность системы

$$(A-2E)\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1-c_4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & c_1+c_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1-c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3-c_4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4-c_3 \end{array}\right).$$

Система совместна при $c_3 = c_4$, при выполнении этого условия найти присоединенный вектор высоты 3 можно из решения неоднородной СЛАУ

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} \boxed{\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} & \begin{array}{l} -c_1-c_3 \\ c_3 \end{array} \end{array}\right).$$

Полагая

$$x_3 = c_5, \quad x_4 = c_6,$$

получим

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -c_1-c_3-c_6 \\ c_3+c_5 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

На этом процесс поиска присоединенных векторов можно остановить, так как сумма длин двух цепочек векторов равна 4, алгебрической кратности собственного значения.

1) Для первой цепочки векторов полагаем

$$\begin{aligned} & c_1 = c_2 = 1, \ \text{(поскольку мы не можем взять нулевой набор этих переменных)}, \\ & c_3 = c_4 = 0, \ \text{(а здесь допускаются нулевые значения переменных)}, \\ & c_5 = c_6 = 0, \end{aligned}$$

откуда получим первую цепочку векторов в виде

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая в жордановой нормальной форме дает жорданову клетку порядка 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Для второй цепочки векторов полагаем

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая в жордановой нормальной форме дает жорданову клетку порядка 1:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая жорданова нормальная форма имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а минимальный многочлен линейного оператора равен

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

Для проверки достаточно вычислить матрицу линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{v}_1)$, матрица перехода к которому равна

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. При расчете и записи базиса нужно соблюдать некоторую осторожность. Например, система векторов

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

уже не образует жорданов базис, поскольку вектор $\boldsymbol{h}_1$ не является присоединенным вектором высоты 3. Кроме того, система векторов

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

также не образует жорданов базис.

Задача 5. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этого линейного оператора.

Решение: Единственное собственное число этого линейного оператора равно $\lambda_1 = 1$, его алгебраическая кратность равна 4 (вычисления опускаю). Найдем собственные векторы этого линейного оператора, для этого составим сначала матрицу $A - \lambda_1 E = A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, значит, размерность собственного подпространства равна $4-1 = 3$, то есть к трем собственным векторам нужно добавить еще один присоединенный вектор. Найдем собственное подпространство в общем виде, решив однородную СЛАУ с матрицей $A - E$. Получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем переменную x_1 базисной, а переменные

$$x_2 = c_1, \quad x_3 = c_2, \quad x_4 = c_3$$

свободными, получим $x_1 = c_1$, откуда собственное подпространство в общем виде записывается как

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2, для чего сначала исследуем совместность системы

$$(A-E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|l} -1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & c_2 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ +3\mathrm{I} \\ +3\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} -1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 + 3c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 + 3c_1 \end{array}\right).$$

Система совместна при

$$c_2 + 3c_1 = c_3 + 3c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = c_3 = -3c_1.$$

Хорошо, пусть так и будет. Найдем общее решение неоднородной СЛАУ

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} -1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & -c_1 \end{array}\right).$$

Полагая свободные переменные равными

$$x_2 = c_4, \quad x_3 = c_5, \quad x_4 = c_6,$$

находим $x_1 = c_4 - c_1$, откуда

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} c_4 - c_1 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

На этом процесс поиска присоединенных векторов можно остановить, поскольку нам требовался всего один присоединенный вектор.

1) Первая цепочка векторов состоит из двух векторов: собственного вектора при выполнении условий $c_2 = c_3 = -3c_1$ и присоединенного вектора высоты 2. Положим

$$c_1 = 1, \quad c_2 = c_3 = -3, \text{ (мы не можем взять нулевой набор этих переменных)},$$
$$c_4 = c_5 = c_6 = 0, \text{ (а здесь допускаются нулевые значения переменных)},$$

и получим

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Вторая цепочка состоит из одного вектора: собственного вектора, для которого не выполнены условия $c_2 = c_3 = -3c_1$. Положим

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0$$

и получим

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Третья цепочка состоит также из одного вектора: собственного вектора, для которого не выполнены условия $c_2 = c_3 = -3c_1$ и линейно-независимого с $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. Положим

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1$$

и получим

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а жорданова нормальная форма имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимальный многочлен линейного оператора равен

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2.$$

Для проверки достаточно вычислить матрицу линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, матрица перехода к которому равна

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этого линейного оператора.

Решение: Единственное собственное значение этого линейного оператора равно $\lambda_1 = 2$, его алгебраическая кратность равна 4 (вычисления опускаю). Найдем собственные векторы этого линейного оператора, для этого составим сначала матрицу $A - \lambda_1 E = A - 2E$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, значит, размерность собственного подпространства равна $4 - 2 = 2$, то есть к двум собственным векторам нужно добавить еще два присоединенных вектора. Найдем собственное подпространство в общем виде, решив однородную СЛАУ с матрицей $A - 2E$. Получим

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Полагаем

$$x_2 = c_1, \quad x_4 = c_2$$

и получаем

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенные векторы высоты 2. Для этого исследуем совместность системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -8 & 4 & 2c_2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & c_1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -c_2 \\ -3 & 0 & -4 & 2 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & c_1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -c_2 \end{array}\right) -\mathrm{I} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & c_1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -c_1 - c_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{II} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3c_1 + 2c_2 \end{array}\right).$$

Система совместна при любых c_1, c_2. Значит, можно построить две различные цепочки векторов длины 2, придавая константам c_1, c_2 различные значения.

Найдем присоединенный вектор высоты 2 в общем виде. Для этого решим неоднородную систему

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3c_1 + 2c_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\1\end{matrix} & \begin{matrix}-4c_1 - 3c_2\\3c_1 + 2c_2\end{matrix} \end{array}\right).$$

Полагаем переменные x_1, x_3 базисными, а

$$x_2 = c_3, \quad x_4 = c_4$$

свободными, получим общее решение в виде

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 2c_4 - 4c_1 - 3c_2 \\ c_3 \\ -c_4 + 3c_1 + 2c_2 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

На этом поиск присоединенных векторов можно остановить, поскольку различные наборы c_1, c_2 дают нам не только различные $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, но и различные $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, а сумма длин двух цепочек будет равна 4, алгебраической кратности собственного значения.

1) Полагая

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$
$$c_3 = c_4 = 0$$

получаем первую цепочку векторов

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Полагая

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1,$$
$$c_3 = c_4 = 0$$

получаем вторую цепочку векторов

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а жорданова нормальная форма имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

то есть состоит из двух жордановых клеток порядка 2. Минимальный многочлен линейного оператора равен

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2.$$

Для проверки достаточно вычислить матрицу линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{f}_2)$, матрица перехода к которому равна

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Жорданов базис линейного оператора с различными собственными значениями

Напоследок кратко поговорим о более общем случае, когда линейный оператор имеет несколько различных собственных значений, то есть его характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ldots (\lambda_m - \lambda)^{k_m}, \quad k_1 + \ldots + k_m = n.$$

Здесь при нахождении жорданова базиса действуем аналогично, следя за тем, чтобы суммарное число векторов базиса для приведения ограничения линейного оператора к жордановой форме было равно алгебраической кратности каждого собственного значения.

Задача 7. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, имеющего в каноническом базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этого линейного оператора.

Решение: Собственные значения этого линейного оператора равны: $\lambda_1 = 1$ (кратности 2) и $\lambda_2 = 2$ (кратности 2). Вычисления, как обычно, опущены.

1) Рассмотрим первое собственное значение $\lambda_1 = 1$ (кратности 2). Составим матрицу $A - \lambda_1 E = A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3. Значит, размерность собственного подпространства равна $4 - 3 = 1$, и жорданов базис составляет один собственный вектор и еще один присоединенный вектор. В результате в жордановой нормальной форме получим одну клетку размером 2. Найдем собственный вектор, решив систему с матрицей $A - E$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\cdot \mathrm{I} \\ \\ -2\cdot \mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть базисные переменные составляют x_1, x_3, x_4, а переменная $x_2 = c_1$ является свободной. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти присоединенный вектор высоты 2, сначала исследуем совместность системы (вычисления опущены)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & -c_1 \\ 2 & 2 & -4 & -3 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc||c} 1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c_1 \end{array}\right),$$

откуда, полагая $x_2 = c_2$, получим

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix}.$$

На этом поиск присоединенных векторов можно остановить, поскольку мы уже нашли два вектора, образующих жорданов базис, а алгебраическая кратность корня $\lambda_1 = 1$ равна 2. Полагая

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

получим

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Рассмотрим второе собственное значение $\lambda_2 = 2$ (кратности 2). Составим матрицу $A - \lambda_2 E = A - 2E$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3. Значит, размерность собственного подпространства равна $4 - 3 = 1$, и жорданов базис составляет один собственный вектор и еще один присоединенный вектор. В результате в жордановой нормальной форме получим одну клетку размером 2. Найдем собственный вектор, решив систему с матрицей $A - 2E$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2\cdot\mathrm{I} \\ \\ \\ +\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{|cc|c|c|} \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right).$$

Пусть базисные переменные составляют x_1, x_2, x_4, а переменная $x_3 = c_1$ является свободной. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти присоединенный вектор высоты 2, сначала исследуем совместность системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 3 & 2c_1 \\ 2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{|cc|c|c||c} \hline -1 & 0 & 2 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 \\ \hline \end{array}\right),$$

откуда, полагая свободную переменную x_3 равной c_2, получим

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

На этом поиск присоединенных векторов можно остановить, поскольку мы уже нашли два вектора, образующих жорданов базис, а алгебраическая кратность корня $\lambda_2 = 2$ равна 2. Полагая

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

получим

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а жорданова нормальная форма равна

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Минимальный многочлен этого линейного оператора совпадает с характеристическим и равен

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, 0, 1)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.

Задача 2. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_1 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{g}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.

Задача 3. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{f}_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 0, 0, 0)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = \lambda^2$.

Задача 4. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{f}_1 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 0, 1)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$.

Задача 5. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы[2].

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 2)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, -1, 0)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$.

Задача 6. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выписать минимальный многочлен этой матрицы[3].

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, жорданов базис $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\boldsymbol{f}_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2, -2, 4, 4)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, 0, 0)^T$, минимальный многочлен $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2$.

[2] Это задача 2 из домашнего задания к семинару 16. Попробуйте найти жорданов базис без знания о том, как выглядит жорданова нормальная форма, а потом сравнить решения, полученные разными методами.

[3] Это задача 4 из домашнего задания к семинару 16. Попробуйте найти жорданов базис без знания о том, как выглядит жорданова нормальная форма, а потом сравнить решения, полученные разными методами.