Семинар 19. Подготовка к контрольной работе № 2

§1. Задача 1. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Подробнее: семинар 14.

Задача 1.1. Линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ действует как ортогональное проектирование на прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

Решение: Ортогональную проекцию на эту прямую можно определить как проекцию на направляющий вектор этой прямой. Направляющий вектор этой прямой равен $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix}1, 0, 1\end{pmatrix}^T$. Для нахождения образов векторов базиса $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ достаточно воспользоваться формулой:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l}.$$

Вычислим образы векторов базиса:

$$\varphi\boldsymbol{i} = \frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi\boldsymbol{j} = \frac{(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi\boldsymbol{k} = \frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Записав образы базиса по столбцам, получаем матрицу линейного оператора

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица ортогонального проектирования на прямую имеет ранг 1.

Задача 1.2. Линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ действует как ортогональное проектирование на плоскость

$$x - 2y + z = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

Решение: Нормальный вектор данной плоскости равен $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1, -2, 1\end{pmatrix}^T$. Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ воспользуемся формулой

$$\text{пр}_{\alpha}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \text{пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Получим:

$$\varphi\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} - \frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\varphi\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} - \frac{(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\varphi\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - \frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix},$$

откуда

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица ортогонального проектирования на плоскость имеет ранг 2.

Задача 1.3. Линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ действует как симметрия относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

Решение: Направляющий вектор данной прямой равен $\boldsymbol{l} = \big(1, 1, 1\big)^T$. Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ воспользуемся формулой

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - 2\left(\boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l}\right) = 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}.$$

Получим:

$$\varphi\boldsymbol{i} = 2\frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{i} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi\boldsymbol{j} = 2\frac{(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{j} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi\boldsymbol{k} = 2\frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l})}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{k} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица симметрии относительно прямой ортогональна.

Задача 1.4. Линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ действует как симметрия относительно плоскости

$$x - 2y = 0.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

Решение: Нормальный вектор данной плоскости равен $\boldsymbol{n} = \big(1, -2, 0\big)^T$. Для нахождения матрицы линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ воспользуемся формулой

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Получим:

$$\varphi \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} - 2\frac{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},$$

$$\varphi \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} - 2\frac{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix},$$

$$\varphi \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - 2\frac{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2\cdot 0}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

откуда

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\4 & -3 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица симметрии относительно плоскости ортогональна.

§2. Задача 2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Нахождение матрицы линейного оператора по результату действия на векторы.

Подробнее: семинар 14 (преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса), семинар 13 (нахождение матрицы линейного оператора по результату действия на векторы).

Задача 2.1. В базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$ двумерного векторного пространства линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix}4 & -11\\5 & -13\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{f_1} = -2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{f_2} = 7\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2}$.

Решение: При преобразовании базиса матрица линейного оператора меняется по формуле:

$$A' = T^{-1}AT,$$

где A, A' — матрица линейного оператора в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ соответственно, T — матрица перехода из базиса $\mathcal{E}$ в базис $\mathcal{F}$.

Матрица перехода в новый базис равна

$$T = \begin{pmatrix}-2 & 7\\-1 & 3\end{pmatrix},$$

а обратная к ней равна

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -7\\1 & -2\end{pmatrix},$$

откуда

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix}3 & -7\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -11\\5 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 7\\-1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12 & 13\\-3 & 3\end{pmatrix}.$$

Задача 2.1. Линейный оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a_1} = (1,2,1)^T$, $\boldsymbol{a_2} = (0,-1,1)^T$, $\boldsymbol{a_3} = (2,3,2)^T$ в векторы $\boldsymbol{b_1} = (4,4,1)^T$, $\boldsymbol{b_2} = (0,1,1)^T$, $\boldsymbol{b_3} = (7,7,2)^T$ соответственно. Найти матрицу этого линейного оператора в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение: Для решения такой задачи достаточно решить матричное уравнение $B = XA$, где A, B — матрицы, в которых по столбцам записаны векторы $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$ соответственно. Напомню, что для решения такого уравнения достаточно воспользоваться формулой $X = BA^{-1}$ или использовать следующую цепочку элементарных преобразований:

$$(A^T|B^T) \sim (E|X^T).$$

Задача сводится к решению матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§3. Задача 3. Жорданова нормальная форма и жорданов базис.

Подробнее: семинар 15 (собственные значения и собственные векторы), семинар 16 (жорданова нормальная форма, минимальный многочлен), семинар 18 (нахождение жорданова базиса).

Задача 3. Для линейного оператора на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

найти:

а) собственные числа и собственные векторы,

б) жорданову нормальную форму и минимальный многочлен,

в) жорданов базис, в котором линейный оператор имеет данную жорданову нормальную форму.

Решение: а) Для нахождения собственных значений нужно решить уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Составим определитель и раскроем его, используя элементарные преобразования над строками:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \end{matrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(2-\lambda) & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{Раскроем} \\ \text{определитель} \\ \text{по первому} \\ \text{столбцу} \end{matrix} \right| =$$

$$= (2-\lambda)^2 \left((3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (2-\lambda)^2 \Big((3-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot (-1) \Big) = (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^4.$$

Единственный корень этого уравнения, а значит, и единственное собственное число этого линейного оператора равно $\lambda_1 = 2$, его алгебраическая кратность равна 4. Найденные собственные значения линейного оператора можно проверить, например, с помощью следа матрицы: сумма всех собственных значений с учетом кратностей должна быть равна следу матрицы. Например, в данном случае имеем: $3 + 2 + 1 + 2 = 4 \cdot 2$, что позволяет надеяться, что собственные числа были найдены верно.

Найдем собственные векторы этого линейного оператора, для этого составим сначала матрицу $A - \lambda_1 E = A - 2E$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, значит, размерность собственного подпространства равна $4 - 2 = 2$, то есть к двум собственным векторам нужно добавить еще два присоединенных вектора. Найдем собственное подпространство в общем виде, решив однородную СЛАУ с матрицей $A - 2E$. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right).$$

Полагая переменные x_1, x_2 базисными, а переменные $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ свободными, получаем

$$x_1 = -x_4 = -c_2, \quad x_2 = x_3 = c_1,$$

то есть общее решение этой системы записывается в виде

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\big(0, 1, 1, 0\big)$ и $\big(-1, 0, 0, 1\big)$ являются собственными векторами линейного оператора.

б,в) Найдем присоединенный вектор высоты 2, для этого исследуем совместность системы

$$(A - 2E)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_2 \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_2 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 - c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 - c_1 \end{array}\right).$$

Значит, система совместна при

$$c_1 = c_2.$$

Число свободных c_i равно 1. Значит, при $c_1 = c_2$ получим первую цепочку векторов, а при $c_1 \neq c_2$ — вторую цепочку векторов, длина которой равна 1 (поскольку для этой цепочки векторов не найдется соответствующих присоединенных векторов). Значит, длина первой цепочки должна быть равна 3, чтобы сумма длин всех цепочек была равна алгебраической кратности корня.

Положим $c_2 = c_1$, тогда для нахождения присодиненных векторов получим систему

$$\left(\begin{array}{cccc|l} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -c_1 \\ c_1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Считаем переменные $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$ свободными. Отсюда получим

$$x_1 = -x_4 - c_1 = -c_1 - c_4, \quad x_2 = x_3 + c_1 = c_1 + c_3,$$

то есть общее решение системы записывается в виде

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_4 \\ c_1 + c_3 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенного вектора высоты 3 исследуем совместность системы

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1 - c_4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & c_1 + c_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_1 - c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 - c_4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 - c_3 \end{array}\right).$$

Система совместна при $c_3 = c_4$, при этом условии найти присоединенный вектор высоты 3 можно из решения неоднородной СЛАУ

$$\left(\begin{array}{cccc|l} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -c_1 - c_3 \\ c_3 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Полагая

$$x_3 = c_5, \quad x_4 = c_6,$$

получим

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_3 - c_6 \\ c_3 + c_5 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

На этом процесс поиска присоединенных векторов можно остановить, так как сумма длин двух цепочек векторов равна 4, алгебрической кратности собственного значения.

1) Для первой цепочки векторов полагаем

$c_1 = c_2 = 1,$ (поскольку мы не можем взять нулевой набор этих переменных),
$c_3 = c_4 = 0,$ (а здесь допускаются нулевые значения переменных),
$c_5 = c_6 = 0,$

откуда получим первую цепочку векторов в виде

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая в жордановой нормальной форме дает жорданову клетку порядка 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Для второй цепочки векторов полагаем

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая в жордановой нормальной форме дает жорданову клетку порядка 1

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданов базис образуют векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая жорданова нормальная форма имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Степень минимального многочлена определяет максимальный размер жордановой клетки, что значит, что минимальный многочлен линейного оператора равен

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

Для проверки достаточно вычислить матрицу линейного оператора в базисе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{v}_1)$, матрица перехода к которому равна

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$