Семинар 20. Функции от матриц

Квадратные матрицы A и B одинакового размера называют *подобными*, если существует такая невырожденная квадратная матрица S, что

$$B = S^{-1}AS.$$

Таким образом, матрицы линейного оператора в различных базисах подобны, а любая квадратная матрица подобна своей жордановой нормальной форме. С помощью подобия матриц можно вычислять различные функции от матриц.

§1. Вычисление многочлена от матрицы

Пусть A — жорданова клетка размера k, то есть

$$A = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда любой многочлен f матрицы A может быть найден по формуле

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(k-2)}(\lambda_0)}{(k-2)!} & \dfrac{f^{(k-1)}(\lambda_0)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(k-3)}(\lambda_0)}{(k-3)!} & \dfrac{f^{(k-2)}(\lambda_0)}{(k-2)!} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Далее, если A — блочно-диагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками $A_1, A_2, \ldots, A_m$ на диагонали, то для любого многочлена f верна формула

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_m) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если матрица A приведена к своей жордановой нормальной форме B с помощью невырожденного преобразования S, то вычислить многочлен от матрицы A можно по формуле

$$f(A) = Sf(B)S^{-1}.$$

Задача 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислить A^5.

Решение: Приведем матрицу к жордановой нормальной форме. Сначала найдем собственные числа матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ -12 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Сумма найденных собственных значений равна $\lambda_1 + \lambda_2 = 3 = \mathrm{tr}(A)$.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным числам.

1) $\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 10-1 & 6 \\ -12 & -7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -12 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

2) $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 10-2 & 6 \\ -12 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейный оператор, имеющий в некотором базисе матрицу A, является полупростым. Матрица перехода к новому базису равна

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая жорданова нормальная форма матрицы A диагональна и имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для диагональной матрицы формула возведения матрицы в степень упрощается и сводится к возведению в требуемую степень элементов на главной диагонали. Таким образом,

$$D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Значит, матрица A^5 равна

$$A^5 = SD^5S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & 186 \\ -372 & -247 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти 2020-ю степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем собственные числа данной матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2i) - 1 = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = (\lambda - i)^2 = 0.$$

Таким образом, единственным собственным числом матрицы является

$$\lambda_0 = i$$

кратности 2. Найдем соответствующий собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & -1 \\ -1 & 2i - \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственным собственным вектором является

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2 (в данном случае не обязательно рассматривать собственный вектор в общем виде и исследовать совместность неоднородной СЛАУ, поскольку собственный вектор всего один и у него обязательно будет присоединенный):

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & i \\ -1 & i & 1 \end{array} \right) \cdot i \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & -1 \end{array} \right).$$

В качестве частного решения последней системы можно взять

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Цепочка векторов $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$ имеет длину 2, поэтому жорданову нормальную форму образует одна клетка размера 2:

$$G = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

а матрицу перехода образуют векторы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$, записанные по столбцам, то есть

$$S = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

Жорданова клетка размера 2 возводится в степень по следующей формуле

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_0^k & k \cdot \lambda_0^{k-1} \\ 0 & \lambda_0^k \end{pmatrix}.$$

В нашем случае получим

$$G^{2020} = \begin{pmatrix} i^{2020} & 2020 \cdot i^{2019} \\ 0 & i^{2020} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2020i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{2020} = SG^{2020}S^{-1} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2020i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2019 & 2020i \\ 2020i & 2021 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $A^{101} - A^{100}$.

Решение: Найдем собственные числа данной матрицы:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & 8 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\mathrm{III} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Таким образом, единственным собственным числом матрицы является

$$\lambda_0 = 1$$

кратности 3. Найдем собственные и присоединенные векторы матрицы:

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right).$$

В качестве собственного вектора выберем

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственное подпространство, соответствующее этому собственному числу, одномерно, жорданова нормальная форма образует единственную клетку, а жорданов базис — этот собственный вектор и два присоединенных вектора. Находим присоединенный вектор высоты 2:

$$A - \lambda_0 E\big|\boldsymbol{v} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\begin{array}{r|r} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right).$$

В качестве присоединенного вектора высоты 2 выберем

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим присоединенный вектор высоты 3:

$$A - \lambda_0 E\big|\boldsymbol{f} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\begin{array}{r|r} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{array}\right).$$

В качестве присоединенного вектора высоты 3 выберем

$$\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют жорданов базис матрицы. Матрица перехода к этому базису равна

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Жорданова нормальная форма B матрицы A имеет единственную жорданову клетку размера 3, то есть

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим многочлен

$$f(x) = x^{101} - x^{100}.$$

Его первая и вторая производные равны

$$f'(x) = 101x^{100} - 100x^{99}, \quad f''(x) = 10100x^{99} - 9900x^{98}.$$

При $\lambda_0 = 1$ имеем

$$f(\lambda_0) = 1^{101} - 1^{100} = 0, \quad \frac{f'(\lambda_0)}{1!} = 101 - 100 = 1, \quad \frac{f''(\lambda_0)}{2!} = \frac{10100 - 9900}{2} = 100.$$

Таким образом,

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda_0)}{2!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к заданному каноническому базису, имеем

$$f(A) = Sf(B)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 204 & 408 \\ 1 & -102 & -204 \end{pmatrix}.$$

§2. Вычисление матричной экспоненты

Пусть A — жорданова клетка размера k, то есть

$$A = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда экспонента e^{At} матрицы A может быть найдена по формуле

$$e^{At} = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, если A — блочно-диагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками $A_1, A_2, \ldots, A_m$ на диагонали, то для любой матричной экспоненты e^{At} верна формула

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_m t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если матрица A приведена к своей жордановой нормальной форме B с помощью невырожденного преобразования S, то вычислить матричную экспоненту e^{At} можно по формуле

$$e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}.$$

Задача 4. Найти экспоненту e^{A} от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для вычисления экспоненты от матрицы опять поможет жорданова нормальная форма. Найдем собственные значения матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ -9 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda + 6) + 36 = \lambda^2 = 0.$$

Таким образом, единственным собственным числом матрицы является

$$\lambda_0 = 0$$

кратности 2. Найдем соответствующий собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} -6-\lambda_0 & 4 \\ -9 & 6-\lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственным собственным вектором является

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ :3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве частного решения последней системы можно взять, например,

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Цепочка векторов $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$ имеет длину 2, поэтому жорданову нормальную форму образует одна клетка размера 2:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу перехода образуют векторы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$, записанные по столбцам, то есть

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Экспонента от жордановой клетки размера 2 вычисляется по следующей формуле

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad e^J = e^{\lambda_0}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае имеем

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$e^A = Se^BS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти 2020-ю степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{2020} = E$.

Задача 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -25 & -9 \end{pmatrix}.$$

Вычислить A^{200}.

Ответ: $A^{200} = \begin{pmatrix} 2001 & 800 \\ -5000 & -1999 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $A^{49} + A^{50}$.

Ответ: $A^{49} + A^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 94 & 188 \\ -1 & -47 & -94 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $A^{1000} - 2A^{999} + A^{997}$.

Ответ: $A^{1000} - 2A^{999} + A^{997} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Найти экспоненту e^A от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -12 \\ 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -12 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.