Семинар 21. Ортогональные и самосопряженные операторы. Полярное разложение

§1. Ортогональные операторы

Пусть V — евклидово пространство, $\dim V = n$. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение

$$(\varphi \boldsymbol{x}, \varphi \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

Можно доказать следующие свойства ортогональных операторов:

1) Ортогональный оператор сохраняет длину вектора и угол между векторами, то есть

$$|\varphi \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|, \quad (\widehat{\varphi \boldsymbol{x}, \varphi \boldsymbol{y}}) = (\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}).$$

2) Если оператор сохраняет длину вектора, то он ортогонален,

3) Если $\mathcal{E}$ — ортогональный базис пространства V, то оператор $\varphi : V \to V$ ортогонален тогда и только тогда, когда его матрица A в базисе $\mathcal{E}$ ортогональна.

4) Если λ_0 — собственное значение ортогонального оператора, то $|\lambda_0| = 1$. Это верно и для комплекснозначных собственных значений.

Задача 1. Показать, что линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ поворота векторов на угол α относительно заданного вектора $\boldsymbol{a}$ является ортогональным.

Указания к решению: Достаточно показать, что такой оператор сохраняет длину вектора.

Задача 2. Проверить, является ли ортогональным линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$, действующий по правилу

$$\varphi \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Решение: Такой линейный оператор сохраняет длину вектора, если $|\lambda| = 1$. Значит, он является ортогональным при выполнении этого условия.

Задача 3. Проверить, является ли ортогональным линейный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$, действующий по правилу

$$\varphi \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e}$ — фиксированный единичный вектор, то есть $|\boldsymbol{e}| = 1$.

Решение: Это линейный оператор проектирования на вектор $\boldsymbol{e}$. При проектировании вектора $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{e}$ можно получить 0, если они ортогональны: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = 0$. Таким образом, этот оператор в общем случае не сохраняет длину вектора, а значит, не является ортогональным.

Для любого ортогонального оператора $\varphi : V \to V$ в пространстве V существует ортонормированный базис $\mathcal{E}$, в котором матрица этого оператора имеет так называемый *канонический вид*:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & \Pi(\alpha_m) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $\Pi(\alpha_i)$ — матрица поворота на угол α_i, то есть

$$\Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти базис, в котором ортогональный оператор имеет канонический вид, нужно поступить следующим образом (для простоты полагаем, что все комлексные собственные значения простые):

1) Найти все собственные значения ортогонального оператора и их кратности.

2) Для каждого из действительных собственных значений $\lambda \in \{1, -1\}$ нужно найти ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_\lambda$ собственного подпространства V_λ, применяя при необходимости процедуру ортогонализации Грама-Шмидта для найденного ранее базиса этого собственного подпространства.

3) Модуль каждого комплексного собственного значения λ_j равен 1 в силу свойств ортогональности оператора, а значит, такое собственное значение можно представить в виде

$$\lambda_j = \cos\alpha_j + i\sin\alpha_j.$$

4) Найти комплексно-значное значение собственного вектора $\boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j$, соответствующего собственному числу λ_j, причем векторы $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ имеют действительные координаты, а $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ ортогональны и имеют одинаковую длину. Векторы $\boldsymbol{f}_1^{(j)} = \frac{\boldsymbol{b}_j}{|\boldsymbol{b}_j|}$ и $\boldsymbol{f}_2^{(j)} = \frac{\boldsymbol{a}_j}{|\boldsymbol{a}_j|}$ образуют ортономирмированный базис $\boldsymbol{f}_j$, отвечающий клетке $\Pi(\alpha_j)$. При этом матрица $\Pi(\alpha_j)$ будет являться матрицей ограничения комплексификации линейного оператора на инвариантное подпространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{f}_j$.

5) Объединяя базисы $\boldsymbol{f}_j$ с базисами $\boldsymbol{e}_{-1}$, $\boldsymbol{e}_1$, составленными из собственных векторов, соответствующим действительным собственным значениям $\lambda \in \{1, -1\}$, получим ортономированный базис пространства V, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

Задача 4. Ортогональный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в некотором ортонормированном базисе

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и соответствующий этому виду канонический ортонормированный базис.

Решение: Найдем характеристический многочлен этого линейного оператора

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \mathrm{I} \end{matrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Раскроем} \\ \text{определитель} \\ \text{по первому столбцу} \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Таким образом, собственные значения линейного оператора равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Этой информации достаточно, чтобы записать канонический вид этого ортогонального оператора, поскольку $i = 0 + 1 \cdot i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем канонический базис.

1) $\lambda_1 = 1$. Найдем соответствующий собственный вектор

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений образует вектор $(1,1,0)^T$, для того, чтоб он мог образовывать канонический базис, его нужно нормировать:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_{2,3} = \pm i$. Найдем собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_2 = i$:

$$A - iE = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -i \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Положим $x_3 = 1$, тогда $x_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$. Таким образом, собственный вектор равен

$$\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ ортонормированны. Таким образом, канонический базис образуют векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Ортогональный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в некотором ортонормированном базисе

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и соответствующий этому виду канонический ортонормированный базис.

Решение: Собственные числа равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Канонический вид матрицы ортогонального оператора равен

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдем канонический базис. Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$, равен $(1,1,1)^T$, а нормированный собственный вектор равен

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, равен

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\mathrm{Re}\boldsymbol{z}$ и $\mathrm{Im}\boldsymbol{z}$ имеют одинаковую длину и ортогональны. Нормируем их:

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, канонический базис образуют векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Понятие сопряженного линейного оператора

Пусть V — евклидово пространство, $\varphi : V \to V$ — линейный оператор. Линейный оператор $\varphi^* : V \to V$ называется *сопряженным* к φ, если для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ выполнено равенство

$$(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi^*\boldsymbol{y}).$$

Можно показать, что для любого линейного оператора существует и единственнен сопряженный к нему оператор, при этом если в ортонормированном базисе оператор φ имеет матрицу A, то сопряженный оператор в этом же базисе имеет матрицу A^T.

Задача 6. Матрица линейного оператора $\varphi : V_3 \to V_3$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператора, если

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ не является ортонормированным. Поэтому нельзя просто транспонировать матрицу и получить верный ответ. Будем действовать следующим образом:

1) Найдем матрицу линейного оператора в каком-нибудь ортонормированном базисе. Конечно, для этого достаточно взять канонический базис

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Транспонируем полученную матрицу, получив матрицу сопряженного оператора в базисе $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$.

3) Найдем матрицу сопряженного оператора в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, сделав обратную замену базиса.

Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{f}$ к базису $\boldsymbol{e}$ равна

$$T_{f\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней равна

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, в базисе $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ матрица оператора φ имеет вид

$$A_f = T_{f\to e} A_e T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ матрица оператора φ^* имеет вид

$$A_f^* = \left(A_f\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пересчитаем эту матрицу в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$:

$$A_e^* = T_{e\to f} A_f^* T_{f\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

§3. Самосопряженные операторы

Линейный оператор $\varphi : V \to V$ называется *самосопряженным*, если $\varphi = \varphi^*$, то есть для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ выполнено равенство

$$(\varphi \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi \boldsymbol{y}).$$

Справедливы следующие свойства самосопряженных операторов:

1) Если $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис, то оператор φ самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица A в этом базисе симметрична: $A = A^T$.

2) Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора вещественны,

3) Если $\varphi : V \to V$ — самосопряженный оператор, то геометрическая кратность каждого его собственного значения равна его алгебраической кратности. Из этого естественным образом следует, что самосопряженный оператор является полупростым.

4) Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортоногональны.

Следовательно, в пространстве V всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора диагональна (это утверждение называется теоремой о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора). Для того, чтобы для заданного самопряженного оператора найти ортонормированный базис, в котором его матрица ортогональна, нужно найти его собственные значения, а потом ортонормированный базис из собственных векторов, при необходимости применив процедуру ортогонализации Грама-Шмидта[1].

Задача 7. Самосопряженный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в ортонормированном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Такая необходимость может возникнуть при нахождении базиса неодномерного собственного подпространства.

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и ортонормированный базис, отвечающий этому виду.

Решение: Собственные значения этого линейного оператора равны $\lambda_1 = 0$ (кратности 2) и $\lambda_2 = 3$ (кратности 1). Найдем базис из собственных векторов.

1) $\lambda_1 = 0$. Тогда собственные векторы, отвечающие этому собственному значению, равны

$$A - \lambda_1 E = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим следующее собственное подпространство:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2.$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ не ортогональны, а значит, для построения этой части канонического базиса применим процедуру ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) $\lambda_2 = 3$. Тогда собственные векторы, отвечающие этому собственному значению, равны

$$A - \lambda_2 E = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственное подпространство, отвечающее этому собственному значению, одномерно, а его базис образует вектор

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Этот собственный вектор ортогонален векторам $\boldsymbol{b}_1^0$, $\boldsymbol{b}_2^0$, поскольку он отвечает другому собственному значению (напомню, что собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны), а значит, применять процедуру ортогонализации больше не потребуется.

Канонический вид матрицы самосопряженного оператора равен

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а ортонормированный канонический базис образуют векторы

$$\boldsymbol{b}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки полученного результата запишем матрицу перехода к новому базису

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица ортогональна, а значит, обратная к ней равна

$$T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по формуле замены матрицы при переходе к новому базису получим[2]

$$A^0 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

§4. Полярное разложение

Пусть $\varphi : V \to V$ — самосопряженный линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве V. Оператор φ называется *положительно определенным*, если для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ справедливо

$$(\boldsymbol{x}, \varphi \boldsymbol{x}) > 0.$$

Можно показать, что самосопряженный линейный оператор положительно определен тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны.

Пусть V — евклидово пространство, $A : V \to V$ — невырожденный линейный оператор, действующий в этом евклидовом пространстве. Тогда A может быть единственным образом представлен в виде

$$A = QS,$$

где Q — ортогональный оператор, а S — положительно определенный самосопряженный оператор. Такое разложение называют *полярным разложением* (или *QS-разложением*) линейного оператора, а сформулированное выше утверждение — *теоремой о полярном разложении*.

Это утверждение можно сформулировать и в терминах матриц, считая A невырожденной, Q — ортогональной, а S — симметрической матрицами с положительными собственными значениями.

Задача 8. Найти QS-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Будем следовать доказательству теоремы о QS-разложении, используя матричную терминологию. Рассмотрим симметричную матрицу $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & -28 \\ -28 & 32 \end{pmatrix}.$$

[2]Можете в самом деле проверить это.

Найдем собственные числа этой матрицы (они должны получиться действительными и положительными):

$$\begin{vmatrix} 65-\lambda & -28 \\ -28 & 32-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 97\lambda + 1296 = 0.$$

Получим $\lambda_1 = 81$, $\lambda_2 = 16$. Ортономированный базис из собственных векторов образуют векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{A\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}}{9} = \frac{\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 72 \\ -9 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{A\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 4 \\ 32 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{f}_1$,$\boldsymbol{f}_2$ должны образовывать ортонормированный базис, что у нас и получилось. Матрица Q равна матрице линейного оператора, переводящего векторы $\boldsymbol{f}_i$ в векторы $\boldsymbol{e}_i$. Таким образом, $Q = FE^{-1}$ или $Q = FE^T$ в силу ортогональности матрицы E, где

$$F = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матрица S вычисляется по формуле $S = Q^{-1}A = Q^TA$ (в силу ортогональности матрицы Q). Применив формулу, получим:

$$S = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 101 & -28 \\ -28 & 68 \end{pmatrix}.$$

Матрица S должна быть симметричной с действительными и положительными собственными числами. Так и есть: собственные числа полученной матрицы равны $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Ортогональный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в некотором ортонормированном базисе

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и соответствующий этому виду канонический ортонормированный базис.

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$.

Задача 2. Матрица линейного оператора $\varphi : V_3 \to V_3$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператора, если

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_e^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Самосопряженный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в ортонормированном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и ортонормированный базис, отвечающий этому виду.

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = (0,0,1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.

Задача 4. Самосопряженный оператор $\varphi : V_3 \to V_3$ задан матрицей в ортонормированном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид матрицы линейного оператора и ортонормированный базис, отвечающий этому виду.

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$.

Задача 5. Найти QS-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.