Семинар 22. Приведение квадратичных форм к главным осям

§1. Метод ортогонального преобразования построения канонического вида квадратичной формы

Пусть задано n-мерное линейное пространство V над $\mathbb{R}$, $q\colon C \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма на нем. Для самосопряженного линейного оператора, заданного симметричной матрицей, было показано, что его матрицу можно представить в виде

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = Q^T AQ,$$

поскольку матрица перехода Q являлась ортогональной. Поскольку матрица любой квадратичной формы является симметричной, то она тоже допускает представление ее в диагональном виде с помощью преобразования

$$[q]_e = QDQ^T,$$

где Q — ортогональная, а D — диагональная матрицы, а значит, диагонализация матриц дает еще один способ приведения квадратичной формы к сумме квадратов: с помощью метода ортогональных преобразований. Преимущество этого метода в том, что он позволяет найти не просто произвольный, а ортонормированный базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Найдя собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы квадратичной формы, можно записать канонический вид квадратичной формы в виде

$$q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots \lambda_n x_n'^2,$$

причем в записи этого канонического вида каждое из собственных чисел будет встречаться столько раз, какова его кратность. Базис при этом образуют нормированные собственные векторы этой матрицы.

Задача 1. Привести квадратичную форму

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Решение: Будем рассматривать q как квадратичную форму на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим за

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу данной формы.

Характеристический многочлен матрицы A равен

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{1}{2}$$

и имеет корень $\lambda_1 = 1/2$ кратности 2 и простой корень $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 1/2$ находятся из однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве фундаментальной системы решений можно взять, например, $\boldsymbol{v_1} = (-1, 0, 1)^T$ и $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1)^T$. Собственные векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не ортогональны между собой. Поэтому для построения ортонормированного базиса в этом собственном подпространстве к ним нужно применить процесс ортогонализации:

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 = (1/2, -1, 1/2)^T.$$

Собственный вектор $\boldsymbol{v}_3$, отвечающий $\lambda_2 = 2$, находится из СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируем векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3$ и получим ортонормированный базис

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

из собственных векторов матрицы A.

Матрицей перехода от канонического базиса $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathbb{R}^3$ к базису $\boldsymbol{f}$ служит ортогональная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

в которой по столбцам записаны координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Это означает, что если в квадратичной форме q сделать *ортогональную* замену переменных в соответствии с матрицей Q, т. е. подставить

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ y = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \end{cases}$$

то форма q преобразуется к каноническому виду (к главным осям)

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + 2z_1^2. \tag{1}$$

Заметим, что коэффициентами при квадратах переменных в каноническом виде (1) служат собственные числа матрицы A. Поэтому, если бы нас интересовал только канонический вид квадратичной формы, но не ортогональная замена, которая к нему приводит, то его можно было бы записать сразу, как только были найдены собственные числа.

§2. Одновременное приведение двух квадратичных форм к главным осям

Пусть q_1 и q_2 — две квадратичные формы на вещественном векторном пространстве V, причём форма q_1 положительно определена. Тогда в V существует базис, в котором обе формы q_1 и q_2 записываются как суммы квадратов. Это утверждение носит название *теоремы об одновременном приведении двух квадратичных форм* к главным осям.

Задача 2. Заданы две квадратичные формы на $\mathbb{R}^2$:

$$q_1(x, y) = x^2 + 10y^2 + 6xy \text{ и } q_2(x, y) = 7x^2 + 101y^2 + 54xy.$$

Привести одновременно к сумме квадратов эти квадратичные формы.

Решение: Пусть матрицы форм q_1 и q_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 27 \\ 27 & 101 \end{pmatrix}$$

соответственно. Главные миноры $\Delta_1 = 1$ и $\Delta_2 = |A| = 1$ матрицы A положительны, следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма q_1 положительно определена.

Задача решается в два этапа: сначала форма q_1 методом Лагранжа приводится к нормальному виду, к форме q_2 применяется та же замена переменных, а затем преобразованная форма q_2 приводится к сумме квадратов ортогональным преобразованием.

Имеем:

$$q_1 = x^2 + 6xy + 9y^2 + y^2 = (x + 3y)^2 + y^2.$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x + 3y, \\ y_1 = y \end{cases}$$

и сразу придём к нормальному виду $q_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2$. Переменные x и y выражаются через x_1 и y_1 следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_1 - 3y_1, \\ y = y_1. \end{cases} \tag{2}$$

Сделаем теперь подстановку (2) в форме q_2:

$$q_2(x_1, y_1) = 7(x_1 - 3y_1)^2 + 101y_1^2 + 54(x_1 - 3y_1)y_1 = 7x_1^2 + 2y_1^2 + 12x_1y_1.$$

Матрицей формы $q_2(x_1, y_1)$ будет

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_C(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda - 22$, собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 11$, соответствующие нормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему примеру, ортогональная замена

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_2, \\ y_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_2 \end{cases} \tag{3}$$

приводит форму q_2 к сумме квадратов $q_2(x_2, y_2) = -2x_2^2 + 11y_2^2$. Здесь следует заметить, что приведение формы q_1 к нормальному виду можно осуществить разными способами, соответственно будет меняться и матрица C. Это никак не влияет на ситуацию принципиально, но при “неудачном” выборе способа приведения формы q_1 у матрицы C может не оказаться простых (например, целых) собственных чисел и векторов и это затруднит вычисления.

Если выполнить эту же замену в форме $q_1(x_1, y_1)$, то она по существу не изменится, ведь её матрицей служит единичная матрица E, а для любой ортогональной матрицы Q выполнено

$$Q^T E Q = Q^T Q = E!$$

Таким образом, и после указанной замены форма q_1 останется суммой квадратов. Итак, к сумме квадратов приведены обе квадратичные формы. Чтобы написать замену переменных, которая сводит к каноническому виду сразу обе квадратичные формы q_1 и q_2, нужно скомбинировать замены (2) и (3). Для этого удобнее всего перемножить их матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, замена

$$\begin{cases} x = \frac{11}{\sqrt{13}}x_2 - \frac{3}{\sqrt{13}}y_2, \\ y = -\frac{3}{\sqrt{13}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{13}}y_2 \end{cases}$$

одновременно приводит к сумме квадратов и форму q_1, и форму q_2.

§3. Приведение уравнения кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду

Кривой второго порядка называют множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, координаты которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

в котором $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$, причем хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля. Это уравнение можно записать в матричной форме

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + b^T\boldsymbol{x} + c = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$.

Слагаемые в левой части последнего уравнения можно разделить на три группы: $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ — квадратичная форма от переменных (x, y), $b^T\boldsymbol{x}$ — линейные слагаемые, c — свободный член.

Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду — это нахождение такой прямоугольной системы координат, в которой уравнение кривой принимает наиболее простой (канонический) вид. Приведение кривой к каноническому виду осуществляется в два этапа:

1) Поворот координатных осей с сохранением начала координат,

2) Параллельный перенос начала координат в новую точку.

На первом этапе нужно найти ортогональное преобразование, которое приводит квадратичную форму $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ к каноническому виду. Этому преобразованию будет соответствовать поворот системы координат на плоскости, причем новыми базисными векторами будут являться собственные векторы матрицы A. Этому вопросу был посвящен первый параграф этого семинара. В результате будет найден канонический вид

$$\varphi(x_1, y_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$$

квадратичной формы и матрица

$$U = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

перехода от исходного базиса $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ к новому базису $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$. Столбцами этой матрицы являются координаты ортонормированных собственных векторов матрицы квадратичной

формы. После этого необходимо сделать замену переменных и записать уравнение кривой в новых переменных
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + c = 0.$$

На втором этапе нужно найти параллельный перенос системы координат. С этим этапом мы подробно знакомились в прошлом семестре, для его реальзации нужно выделить полные квадраты по всем переменным. Таким образом будет найдено результирующее преобразование координат.

В результате этих действий получим уравнение одного из видов:

1) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + c = 0,$

2) $\lambda_1 x_1^2 + b_0 y_1 = 0,$

3) $\lambda_1 x_1^2 + a_0 = 0.$

Определитель матрицы $\det A$ определяет тип кривой:

1) Если $\det A > 0$, то кривая эллиптического типа (оба коэффициента перед квадратами переменных больше нуля, что соответствует каноническому уравнению эллипса),

2) Если $\det A < 0$, то кривая гиперболического типа (коэффициенты перед квадратами переменных разных знаков, что соответствует каноническому уравнению гиперболы),

3) Если $\det A = 0$, то кривая параболического типа (один из коэффициентов перед квадратами переменных равен нулю, что соответствует каноническому уравнению параболы).

В общем случае мы не можем утверждать, что, например, "кривая эллиптического типа" является эллипсом, поскольку можно получить какой-нибудь вырожденный случай, например, точку или мнимый эллипс[1].

Задача 3. Привести к каноническому виду и построить кривую
$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

Решение: Квадратичной формой в этом уравнении является
$$q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$$
с матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами матрицы A являются числа $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 5$, находится из решения однородной системы линейных уравнений
$$A - 5E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
В качестве фундаментальной системы решений можно взять вектор
$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Аналогично, для $\lambda_2 = 10$ получаем однородную СЛАУ
$$A - 10E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[1]Советую вспомнить классификацию кривых и поверхностей второго порядка, поскольку я не буду говорить об этом в этом семинаре, считая, что это уже известно.

и решение

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти векторы ортогональны (собственные векторы симметричной матрицы, отвечающие различным собственным значениям, должны быть ортогональны). Нормируем эти векторы:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\|\boldsymbol{v_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица замены координат — это матрица перехода к базису $(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Чтобы старая и новая система координат были одинаково ориентированы, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был равен 1. В данном случае это выполнено. В случае, если бы это условие не выполнялось, нужно было заменить один из векторов на противоположный.

Таким образом, замена переменных в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1, \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_1. \end{cases}$$

Квадратичная форма преобразуется к каноническому виду

$$5x_1^2 + 10y_1^2,$$

где перед квадратами переменных стоят собственные числа матрицы квадратичной формы. Найдем новую линейную часть, выполнив указанную замену координат в линейной части:

$$16x - 8y = 16\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1\right) - 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_1\right) = -\frac{40}{\sqrt{5}} y_1.$$

Итак, в новых переменных уравнение кривой запишется в виде

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{40}{\sqrt{5}} y_1 - 2 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменной y_1:

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - \frac{40}{\sqrt{5}} y_1 - 2 = 5x_1^2 + 10\left(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{4}{5}\right) - \frac{40}{5} - 2 =$$

$$= 5x_1^2 + 10\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10 = 0.$$

Затем сделаем вторую замену:

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} = y_2. \end{cases}$$

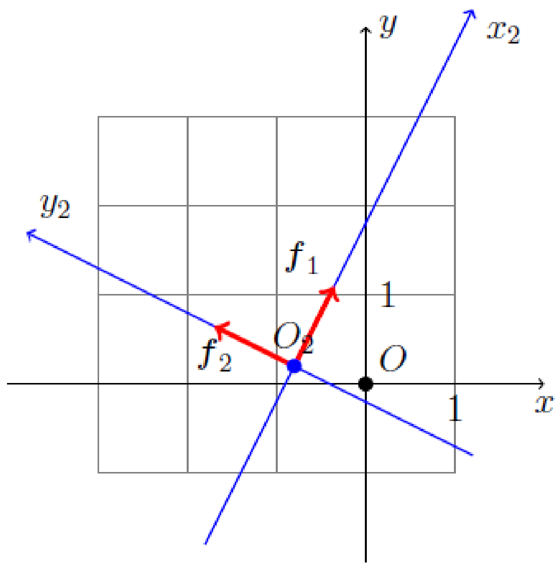
В результате уравнение кривой преобразуется к виду

$$5x_2^2 + 10y_2^2 = 10 \quad \text{или} \quad \frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1.$$

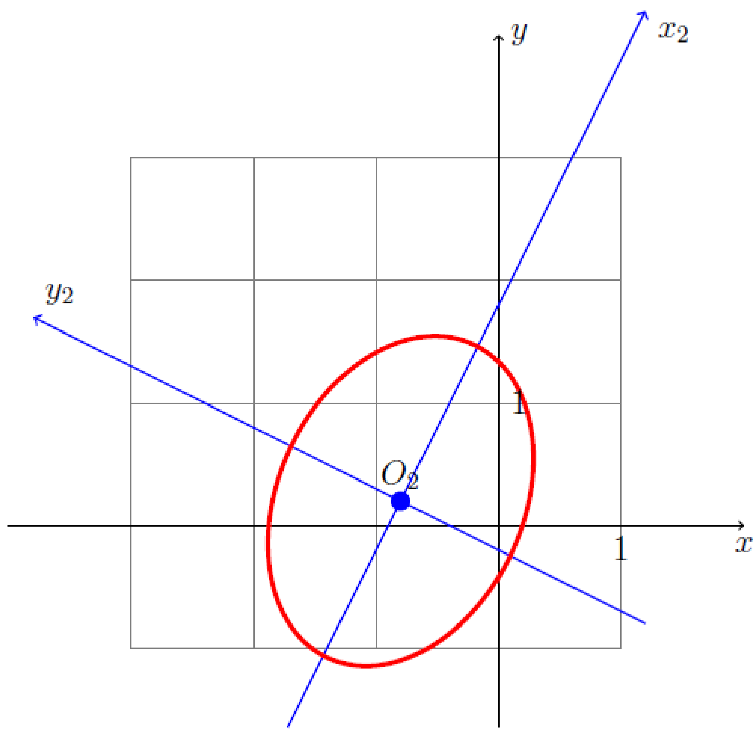
Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2}$ и 1. Найдем также связь канонических координат x_2, y_2 с исходными x, y. Для этого применим последовательно две указанные замены переменных. В результате получим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(y_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}) \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}) \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Построим кривую в исходной системе координат. Начало канонической системы координат имеет координаты $(0, 0)$ в системе координат (x_2, y_2). С помощью полученной замены переменных найдем начало координат в исходной системе координат: $x = -4/5, y = 2/5$. Во-вторых, оси канонической системы координат будут направлены по собственным векторам $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$, поскольку за поворот системы координат отвечает ортогональное преобразование квадратичной формы. Изобразим положение системы координат на чертеже.



Осталось только изобразить эллипс с полуосями $\sqrt{2}$ и 1 в канонической системе координат:



Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду производится аналогично, только все пребразования выполняются над тремя координатами (x, y, z).

Задача 4. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$$

Указать ортогональное преобразование, приводящее уравнение к каноническому виду. Назвать поверхность.

Решение: Квадратичной формой в этом уравнении является

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, это значит, что в каноническом виде содержится квадрат только одной переменной.

Собственные числа матрицы A равны $\lambda_{1,2} = 0$ (кратности 2) и $\lambda_3 = 6$ (кратности 1). Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda_{1,2} = 0$, получим однородную СЛАУ с матрицей

$$A - 0 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Выбирая в качестве базисной переменной x_2, находим собственные векторы в виде

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы не ортогональны друг другу. Значит, для получения ортогонального базиса придется применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{v_2} - \frac{(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1})}\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = 6$, находится из решения однородной СЛАУ с матрицей

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выбрав в качестве свободной переменной x_1, получим собственный вектор

$$\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Нормируем векторы:

$$\boldsymbol{f_1} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_2} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_3} = \frac{\boldsymbol{v_3}}{\|\boldsymbol{v_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из ортонормированных собственных векторов (матрицу перехода к новому базису)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен -1, что означает, что векторы образуют левую тройку. Поэтому заменим вектор $\boldsymbol{f_2}$ на $-\boldsymbol{f_2}$ (чтобы в матрице было меньше знаков минус) и тогда

$$\boldsymbol{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Замечание. На самом деле, можно не использовать процедуру ортогонализации, а поступить следующим образом. После нахождения собственного вектора, соответствующего простому корню и одному из собственных векторов, соответствующих кратному корню, третий вектор можно найти как векторное произведение полученных двух. При правильной расстановке векторов можно будет гарантировать, что полученная тройка векторов будет образовывать правый ортонормированный базис.

Итак, получаем следующую замену координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_1, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_1. \end{cases}$$

Запишем квадратичную форму в каноническом виде

$$q(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 6 z_1^2.$$

Преобразуем линейную часть уравнения поверхности:

$$-6z = -6 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 \right) = 2\sqrt{3} y_1 - 2\sqrt{6} z_1.$$

Таким образом, уравнение поверхности в координатах (x_1, y_1, z_1) имеет вид

$$6 z_1^2 + 2\sqrt{3} y_1 - 2\sqrt{6} z_1 + 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменной z_1 и запишем уравнение в виде

$$\left(z_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1.$$

Преобразование параллельного переноса имеет вид

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases},$$

а полученное уравние поверхности

$$z_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2.$$

Это параболический цилиндр.

Найдем результирующее преобразование координат, связывающее исходные и канонические координаты:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_2 + \frac{1}{6}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_2 + \frac{1}{6}, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_2 + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$q(x,y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2$$

к каноническому виду. Записать этот канонический вид, расположив собственные значения в порядке возрастания.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1)$, $q(x_1, y_1) = -2x_1^2 + 8y_1^2$.

Задача 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду. Записать этот канонический вид, расположив собственные значения в порядке возрастания.

Ответ: $x_1 = (\frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{3}} - \frac{y_3}{\sqrt{6}})$, $x_2 = (\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{3}} + \frac{y_3}{\sqrt{6}})$, $x_3 = (-\frac{y_2}{\sqrt{3}} + \frac{2y_3}{\sqrt{6}})$, $q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$.

Задача 3. Убедиться, что квадратичная форма

$$q_1(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy$$

положительно определена и осуществить одновременное приведение к сумме квадратов форм q_1 и $q_2(x,y) = x^2 - 6y^2$. Указать соответствующую замену переменных.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-3x_2 + 4y_2)$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + y_1)$, $q_1(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2$, $q_2(x_2, y_2) = -3x_2^2 + 2y_2^2$.

Задача 4. Привести уравнение кривой

$$8xy - 16x^2 - y^2 + 6\sqrt{17}x - 10\sqrt{17}y + 51 = 0$$

к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат и построить кривую в исходной системе координат.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4x_2 + y_2 + 6)$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-x_1 + 4y_1 + 7)$, уравнение кривой $x_2^2 = -2y_2$, парабола.

Задача 5. Поверхность задана в $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 4x + 16y + 4z + 8 = 0.$$

а) Найти собственные числа и ортонормированный базис из собственных векторов соответствующей квадратичной формы,

б) Привести уравнение поверхности к каноническому виду, указать соответствующую замену переменных и определить тип поверхности.

Ответ: а) $\lambda_1 = -10$, $\lambda_{2,3} = 4$, $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$.

б) $x = (\frac{x_2}{\sqrt{14}} + \frac{2y_2}{\sqrt{5}} + \frac{3z_2}{\sqrt{70}}) + 1$, $y = (\frac{2x_2}{\sqrt{14}} - \frac{y_2}{\sqrt{5}} + \frac{6z_2}{\sqrt{70}}) - 1$, $z = (\frac{3x_2}{\sqrt{14}} - \frac{5z_2}{\sqrt{70}}) + 1$, $-5x_2^2 + 2y_2^2 + 2z_2^2 = 0$, конус.