Семинар 23-24. Аффинные пространства

§1. Понятие аффинного пространства

Пусть задано n-мерное линейное пространство V над полем $\mathbb{F}$ и пусть $\mathbb{A}$ — некоторое множество, элементы которого мы будем называть точками. Пусть каждой упорядоченной паре точек $a, b \in \mathbb{A}$ поставлен в соответствие единственный вектор $\boldsymbol{x} = \overline{ab} \in V$, причем выполняются две аксиомы:

1) Для любой точки $a \in \mathbb{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ существует единственная точка $b \in \mathbb{A}$ такая, что $\overline{ab} = \boldsymbol{x}$. В этом случае мы будем писать $b = a + \overline{ab}$ и говорить, что точка b получается из точки a откладыванием вектора $\overline{ab}$.

2) Для любых трех (не обязательно различных) точек $a, b, c \in \mathbb{A}$ выполнено равенство $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ (аксиома треугольника).

В этом случае пара $(V, \mathbb{A})$ называется *аффинным пространством*. Часто его ассоциируют именно с множеством точек $\mathbb{A}$.

Размерностью $\dim \mathbb{A}$ аффинного пространства $(V, \mathbb{A})$ называется размерность ассоциированного с ним векторного пространства V, то есть $\dim \mathbb{A} = \dim V$. Будем рассматривать аффинные пространства конечной размерности.

Аффинной системой координат в аффинном пространстве $(V, \mathbb{A})$ называется пара $(o, \mathcal{E})$, где $o \in \mathbb{A}$ — некоторая фиксированная точка (начало координат), $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ — базис в V. Координатами точки $a \in \mathbb{A}$ называются координаты вектора $\overline{oa}$ в базисе $\mathcal{E}$.

При этом координаты вектора $\overline{ab}$ можно вычислить как разность координат конца и начала вектора.

Аффинным подпространством аффинного пространства $(V, \mathbb{A})$ называют пару (L, U) вида

$$L = p + U,$$

где $p \in \mathbb{A}$ — некоторая точка (начальная точка), $U \subseteq V$ — подпространство линейного пространства V (его называют *направляющим подпространством*). При этом

$$p + U = \{\, p + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in U \,\}.$$

Размерностью аффинного подпространства (L, U) называют размерность его направляющего подпространства. Одномерные аффинные подпространства часто называют *прямыми*, а $(n-1)$-ные подпространства — *гиперплоскостями*, по аналогии с прямыми и плоскостями в самом известном примере аффинного пространства — множестве точек обычной евклидовой геометрии.

§2. Способы задания аффинных подпространств

Поговорим о том, как можно задавать аффинные подпространства. Пусть $\pi = a + U$ — r-мерное подпространство в $\mathbb{A}$, а $\{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_r}\}$ — какой-нибудь базис в U. Тогда аффинное подпространство π представляет собой множество точек вида

$$c = a + t_1 \boldsymbol{f_1} + \cdots + t_r \boldsymbol{f_r},$$

где параметры $t_1, \ldots, t_r$ независимо друг от друга пробегают все множество значений из поля $\mathbb{F}$. Если введена система координат $(o, \mathcal{E})$ и $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — координаты точки a, а $(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$ — координаты вектора $\boldsymbol{f_j}$ в базисе $\mathcal{E}$, то параметрические уравнения записываются в виде

$$\begin{cases} x_1 & = x_1^0 + t_1\alpha_1^1 + \ldots + t_r\alpha_1^r, \\ \ldots \\ x_i & = x_i^0 + t_1\alpha_i^1 + \ldots + t_r\alpha_i^r, \\ \ldots \\ x_n & = x_n^0 + t_1\alpha_n^1 + \ldots + t_r\alpha_n^r \end{cases}$$

Если пространство U задано в неявном виде (в виде однородной системы линейных уравнений)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

то координаты всех точек подпространства $a + U$ (и только они) удовлетворяют неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \ldots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где правая часть b_j получается подстановкой в левую часть j-того уравнения координат точки a. Такие уравнения называют *общими уравнениями* подпространства. Минимальное число уравнений в такой системе равно $n - \dim U$.

Задача 1. От общих уравнений в $\mathbb{R}^4$ перейти к заданию подпространства в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение: Для этого достаточно решить неоднородную СЛАУ и записать общее решение в виде разложения по базису. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c rr|r} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{r} -3 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{r} -4 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array} \end{array}\right).$$

Полагая свободные переменные равными $x_3 = t_1, x_4 = t_2$, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $(-1, 2, 0, 0)^T$ — координаты произвольной точки в заданном аффинном подпространстве, $(3, -1, 1, 0)^T$, $(-4, 1, 0, 1)^T$ — координаты базиса в направляющем подпространстве. Раскрыв скобки в каждом из выражений, можно получить уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3t_1 - 4t_2, \\ x_2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2. \end{cases}$$

Задача 2. От параметрических уравнений в $\mathbb{R}^5$ перейти к заданию подпространства в общем виде

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = -3 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x_5 = 1 + t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

Решение: Перепишем эти уравнения в виде

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $(2, 1, -3, 3, 1)^T$ — координаты точки a в этом подпространстве, $(1, 2, 1, 3, 1)^T$, $(1, 1, 2, 1, 3)^T$ — координаты базиса направляющего подпространства. Найдем сначала общие уравнения направляющего подпространства. Для этого сначала решим однородную СЛАУ с матрицей, в которой координаты векторов базиса направляющего подпространства записаны по строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix}\right).$$

Выбирая в качестве базисных переменных x_1, x_2, а в качестве свободных — x_3, x_4, x_5, получим, что общее решение этой системы записывается в виде

$$\boldsymbol{f} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общие уравнения направляющего подпространства имеют вид

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -5x_1 + 2x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

В этой системе в качестве коэффициентов уравнений взята ФСР однородной СЛАУ.

Левая часть общих уравнений аффинного подпространства совпадает с левой частью общих управлений направляющего подпространства. Для нахождения правой части нужно подставить координаты точки a, то есть $(2, 1, -3, 3, 1)^T$. Получим:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ -5x_1 + 2x_2 + x_5 = -7. \end{cases}$$

§3. Аффинные оболочки множества точек

Аффинной оболочкой $\langle S\rangle$ множества $S \subset \mathbb{A}$ аффинного пространства $\mathbb{A}$ называется наименьшее аффинное подпространство, содержащее S. Можно показать, что если $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$, то

$$\langle S\rangle = s_0 + \langle \overline{s_0 s_1}, \ldots, \overline{s_0 s_m}\rangle.$$

Точки $s_0, s_1, \ldots, s_m$ аффинного пространства $\mathbb{A}$ называются *аффинно независимыми*, если

$$\dim\langle s_0, s_1, \ldots, s_m\rangle = m.$$

Задача 3. Найти общие и параметрические уравнения, задающие аффинную оболочку точек в $\mathbb{R}^4$:

$$A(-1,1,0,1)^T, \quad B(0,0,2,0)^T, \quad C(-3,-1,5,4)^T, \quad D(2,2,-3,-3)^T.$$

Решение: Пусть $s_0 = B = (0,0,2,0)^T$. Тогда

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} -3\\ -1\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{BD} = \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ -5\\ -3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, являются ли векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}$ линейно независимыми. Для этого достаточно вычислить ранг матрицы, в которой координаты этих векторов записаны по столбцам, то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -5\\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, поэтому для задания линейной оболочки направляющего подпространства достаточно взять два линейно независимых вектора из них. Возьмем $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Значит, параметрические уравнения заданной аффинной оболочки точек равны

$$\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3\\ -1\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем общие уравнения этого подпространства. Для этого сначала, как и в предыдущей задаче, найдем общие уравнения направляющего подпространства. Сначала решим систему однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1\\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} -5 & 11\\ -4 & 9 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0\\ 1 \end{matrix}}\right).$$

Выбирая в качестве базисных переменных x_1, x_4 и полагая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, запишем общее решение в виде

$$c_1 \begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 0\\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -11\\ 0\\ 1\\ -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, взяв ФСР полученной СЛАУ в качестве коэффициентов общих уравнений направляющего подпространства, получим, что направляющее линейное подпространство описывается системой уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы получить уравнения соответствующего аффинного подпространства, подставим координаты любой из данных точек в левые части полученных уравнений и получим:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0, \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = -2. \end{cases}$$

§4. Взаимное расположение подпространств в аффинном пространстве

Пусть $(V, \mathbb{A})$ — аффинное пространство, U, W — подпространства в V, $a, b \in \mathbb{A}$ — точки. Подпространства $a + U$ и $b + W$ называются *паралелльными*, если $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$. Подпространства $a + U$ и $b + W$ называются *скрещивающимися*, если они не параллельны и не пересекаются. *Степенью параллельности* подпространств $a + U$ и $b + W$ называется число $\dim(U \cap W)$.

Задача 4. Описать ранговые условия всех случаев взаимного расположения гиперплоскостей в n-мерном пространстве

$$\begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = d, \end{cases}$$

Решение: Пусть

$$r = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}, \qquad R = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & c \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & d \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $r = R = 2$, то плоскости пересекаются, если $r = 1$, $R = 2$, то плоскости параллельны, если $r = R = 1$, то плоскости совпадают.

Как определить, пересекаются ли подпространства?

1) Если подпространства заданы неявными уравнениями, достаточно решить неоднородную СЛАУ, которая получена объединением всех уравнений для обоих подпространств.

2) Если подпространства $a + U$ и $b + W$ заданы параметрическими уравнениями, то они пересекаются, когда вектор $\overline{ab}$ принадлежит векторному пространству $U + W$.

Суммой аффинных подпространств $L = a + U$ и $N = b + W$ называется аффинное подпространство

$$L + N = \langle L, N \rangle.$$

Для размерности суммы и пересечения аффинных подпространств $L = a+U$ и $N = b+W$ верна *формула Грассмана*, которая в случае аффинных подпространств записывается следующим образом:

1) Если L и N пересекаются (то есть если $L \cap N \neq \emptyset$), то

$$\dim(L + N) = \dim L + \dim N - \dim(L \cap N).$$

2) Если L и N не пересекаются (то есть если $L \cap N = \emptyset$), то

$$\dim(L + N) = \dim L + \dim N - \dim(U \cap W) + 1.$$

Задача 5. Выяснить, пересекаются ли подпространства:

$$L\colon\ \begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3, \end{cases} \qquad N\colon\ \begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 5x_1-x_2+3x_3-5x_4=2. \end{cases}$$

Если подпространства пересекаются, найти размерности суммы и пересечения.

Решение: Подпространства заданы неявно. Значит, пересечение подпространств неявно описывается системой уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 5x_1-x_2+3x_3-5x_4=2. \end{cases}$$

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & -1 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{array}\right).$$

Уже видно, что эта СЛАУ совместна, а значит, аффинные подпространства пересекаются. Размерность пересечения $\dim(L\cap N)$ равна $4-3=1$, где 4 — размерность данного аффинного пространства, 3 — ранг матрицы системы. Размерность суммы найдем по формуле Грассмана:

$$\dim(L+N)=\dim L+\dim N-\dim(L\cap N)=2+2-1=3.$$

Задача 6. Выяснить размерности суммы и пересечения аффинных подпространств

$$L\colon\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=6,\\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4=2, \end{cases} \qquad N\colon\ \begin{cases} x_1=1-t_1,\\ x_2=1+2t_1+t_2,\\ x_3=1-2t_1+2t_2,\\ x_4=1+t_1+t_2. \end{cases}$$

Решение: Сначала для удобства зададим подпространство N общими уравнениями. Перепишем параметрические уравнения N в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем общие уравнения для описания направляющего подпространства N. Для этого решим однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{matrix}}\begin{matrix} 6 & 1\\ 2 & 1 \end{matrix}\right).$$

Полагая переменные x_1, x_2 базисными, а $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, найдем общее решение в виде

$$c_1\begin{pmatrix} -6\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, направляющее подпространство задается неявно системой уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

а соответствующее аффинное подпространство N

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Для выяснения пересечения подпространств объединим уравнения в систему уравнений и решим полученную однородную СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$$

Решив систему (выкладки опускаю), получаем единственное решение $(-3, \frac{33}{4}, -\frac{17}{2}, \frac{17}{4})^T$. Таким образом, подпространства пересекаются в единственной точке. Значит, размерность пересечения

$$\dim(L \cap N) = 0.$$

Размерность суммы определим по формуле Грассмана:

$$\dim(L + N) = \dim L + \dim N - \dim(L \cap N) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Задача 7. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - 3x_1 + x_3 - 3x_4 = -9. \end{cases}$$

а) Доказать, что подпространства не пересекаются.
б) Найти степень параллельности подпространств.

Решение: а) Для нахождения пересечения подпространств объединим обе системы уравнений в одну:

$$L \cap N\colon \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - 3x_1 + x_3 - 3x_4 = -9. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right).$$

Видно, что ранг r матрицы системы равен 3, а ранг R расширенной матрицы системы равен 4. Значит, система несовместна, то есть подпространства не пересекаются.

б) Степень параллельности подпространств равна $\dim(U \cap W)$, то есть $n - r = 4 - 3 = 1$, где n — размерность пространства, r — ранг матрицы пересечения подпространств.

Задача 8. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Показать, что пространства пересекаются.
в) Найти размерности их суммы и пересечения, а также параметрическое задание подпространства $L \cap N$ и неявное задание подпространства $L + N$.

Решение: а) Параметрическое задание подпространств L и N имеет вид (расчеты опускаю):

$$L\colon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) Чтобы показать, что подпространства пересекаются, удобнее использовать их общие уравнения. Объединим эти уравнения в систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}} \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ -5 \end{array} \end{array}\right).$$

Выбрав в качестве базисных переменных x_1, x_2, x_3 и полагая $x_4 = 3t - 1$, получим параметрическое задание пространства пересечения в виде

$$L \cap N\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку система (1) совместна, пространства пересекаются.

в) Кроме того, решив систему (1), мы нашли параметрическое задание подпространства $L \cap N$. Размерность $\dim(L \cap N)$ переечения равна 1. По формуле Грассмана:

$$\dim(L + N) = \dim L + \dim N - \dim(L \cap N) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Чтобы найти неявное задание подпространства $L + N$, запишем векторы базиса направляющих подпространств L и N, найденные в пункте а), по строкам, и решим однородную систему

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} \begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ -1 \end{array} \right).$$

Выбрав в качестве базисных переменных x_1, x_2, x_3 и полагая $x_4 = c$, получим общее решение этой системы

$$c\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Координаты полученного вектора — это коэффициенты уравнения направляющего подпространства $L+N$:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

Подставим координаты точки $A(2,0,1,0)^T$, $B(0,1,0,0)^T$ или $C(0,1,1,-1)^T$ в правую часть и получим неявное задание подпространства $L+N$:

$$L+N\colon\ \begin{cases}x_1+3x_2+x_3+x_4=3.\end{cases}$$

Задача 9. Найти точку пересечения прямых

$$L\colon\ \begin{cases}x_1=2+2t,\\ x_2=1+3t,\\ x_3=1+t,\\ x_4=3+t,\\ x_5=-3-t.\end{cases}\qquad N\colon\ \begin{cases}x_1=1+s,\\ x_2=1+2s,\\ x_3=2+s,\\ x_4=1,\\ x_5=2+s.\end{cases}$$

Решение: Пусть t, s — параметр точки пересечения прямых на прямых L и N соответственно. Тогда верна система уравнений

$$\begin{cases}2+2t &= 1+s,\\ 1+3t &= 1+2s,\\ 1+t &= 2+s,\\ 3+t &= 1,\\ -3-t &= 2+s,\end{cases}$$

откуда $t=-2$, $s=-3$ (и эти соотношения выполнены для каждого уравнения системы). Подставив $t=-2$ в уравнения для прямой L (или $s=-3$ в уравнения для прямой N), получим $A(-2,-5,-1,1,-1)^T$.

Задача 10. Найти прямую, проходящую через точку $C(8,9,-11,-15)^T$ и пересекающую прямые

$$L\colon\ \begin{cases}x_1=1+t,\\ x_2=2t,\\ x_3=-2-t,\\ x_4=1-5t,\end{cases}\qquad N\colon\ \begin{cases}x_1=2s,\\ x_2=1+3s,\\ x_3=1-2s,\\ x_4=-1-4s.\end{cases}$$

Решение: Запишем уравнения прямых в виде

$$L\colon\ A+\boldsymbol{l}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-5\end{pmatrix},\quad N\colon\ B+\boldsymbol{m}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\-4\end{pmatrix}.$$

Чтобы такая прямая существовала, векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{m}$ должны быть линейно зависимы. Найдем координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AC}=(7,9,-9,-16)^T,\quad \overline{BC}=(8,8,-12,-14)^T.$$

Проверим условие линейной зависимости. Для этого достаточно вычислить определитель матрицы, в которой записаны по столбцам векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{m}$. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & -9 & -12 \\ -5 & -4 & -16 & -14 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ +5\cdot\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 19 & 26 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +6\cdot\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, такая прямая действительно существует. Пусть $\boldsymbol{d}$ — направляющий вектор этой прямой. Тогда $C + \boldsymbol{d}$ задает прямую как аффинное подпространство. Тогда

$$\boldsymbol{d} = \lambda_1\overline{AC} + \lambda_2\boldsymbol{l} = \lambda_3\overline{BC} + \lambda_4\boldsymbol{m},$$

откуда

$$\lambda_1\overline{AC} + \lambda_2\boldsymbol{l} - \lambda_3\overline{BC} - \lambda_4\boldsymbol{m} = 0 \quad \text{или}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -9 \\ -16 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \lambda_3\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -12 \\ -14 \end{pmatrix} - \lambda_4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0.$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — любое нетривиальное решение этого уравнения. В качестве такого решения можно взять, например,

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 2.$$

Таким образом, направляющий вектор прямой параллелен вектору

$$\boldsymbol{d} = 2\overline{AC} - 2\boldsymbol{l} = 2\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -9 \\ -16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ -16 \\ -22 \end{pmatrix}$$

или

$$\boldsymbol{d} = \overline{BC} + 2\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -12 \\ -14 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ -16 \\ -22 \end{pmatrix}.$$

В любом случае, в качестве направляющего вектора прямой можно взять

$$\boldsymbol{d_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой

$$P\colon \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -11 \\ -15 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. От общих уравнений в $\mathbb{R}^5$ перейти к заданию подпространства в параметрическом виде

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 10, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 15. \end{cases}$$

Ответ: $L\colon \begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -5 + 5t_1 - 2t_2, \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = 3 - 2t_1. \end{cases}$

Задача 2. От параметрических уравнений в $\mathbb{R}^5$ перейти к заданию подпространства в общем виде

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 + 2t_2, \\ x_2 = 1 + t_1 + t_2, \\ x_3 = 1 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_5 = 1 + t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 3. Найти общие и параметрические уравнения, задающие аффинную оболочку точек в $\mathbb{R}^4$:

$$A(1,1,1,1)^T, \quad B(2,3,2,3)^T, \quad C(3,2,3,2)^T.$$

Ответ: Общие уравнения $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$, параметрические $\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + 2t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = 1 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 1 + 2t_1 + t_2. \end{cases}$.

Задача 4. Выяснить взаимное расположение аффинной оболочки L точек

$$A(2,1,-1,1)^T, \quad B(3,2,-1,3)^T, \quad C(1,1,0,3)^T \quad D(2,2,0,5)^T$$

и прямой

$$N\colon \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \\ x_4 = 3 - t. \end{cases}$$

Найти размерность пересечения $\dim(L \cap N)$ и суммы $\dim(L + N)$ подпространств.

Ответ: Пространства пересекаются в единственной точке A, $\dim(L \cap N) = 0$, $\dim(L + N) = 4$.

Задача 5. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Показать, что пространства пересекаются.

в) Найти размерности их суммы и пересечения, а также параметрическое задание подпространства $L \cap N$ и неявное задание подпространства $L + N$.

Ответ: а) $L\colon \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

б) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$, система совместна.

в) $\dim(L \cap N) = 1$, $\dim(L + N) = 3$, $L \cap N\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L + N\colon \left\{3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3.\right.$

Задача 6. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

а) Показать, что пространства L и N не пересекаются.
б) Найти степень параллельности L и N.

Ответ: а) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & -3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, система несовместна, б) $\dim(U \cap W) = 1$.

Задача 7. Найти точку пересечения прямых

$$L\colon \begin{cases} x_1 = 3 + t, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2 + t, \\ x_4 = 3 + t, \\ x_5 = 3 + 2t. \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} x_1 = 2 + 2s, \\ x_2 = 2 + s, \\ x_3 = -1, \\ x_4 = -1 + s, \\ x_5 = -2 + s. \end{cases}$$

Ответ: $(0, 1, -1, -2, -3)^T$.

Задача 8. Найти прямую, проходящую через точку $C(6, 5, -1, 1)^T$ и пересекающую аффинные подпространства

$$L\colon \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_4 = 1. \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} x_1 = 2 + t, \\ x_2 = 1 + 2t, \\ x_3 = -4 + 3t, \\ x_4 = -3 + 4t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.