Семинар 25. Евклидовы афинные пространства

Аффинное пространство $(\mathcal{L}, \mathbb{A})$ называется *евклидовым*, если $\mathcal{L}$ евклидово. *Расстоянием* между двумя точками A и B называют длину вектора $\overline{AB}$. Углом $\angle ABC$ называют угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

Аффинные подпространства $a+U$ и $b+W$ называются *ортогональными*, если ортогональны их направляющие подпространства, т.е. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ для любых $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$. *Углом между подпространствами* называется угол между их направляющими подпространствами, то есть точняя нижняя грань углов между ненулевыми векторами из U и W. *Расстоянием* между аффинными подпространствами называется число

$$\rho(a+U, b+W) = \inf\{\rho(x,y) : \; x \in a+U, \, y \in b+W\}.$$

Можно доказать, что расстояние между подпространствами равно длине ортогональной составляющей вектора $\overline{ab}$ относительно линейного пространства $U+W$.

Всюду при решении задач предполагается, что система координат прямоугольная, то есть базис образуют ортонормированные системы векторов, скалярное произведение задано стандартным образом, то есть как сумма попарных произведений соответствующих координат.

Задача 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти прямую, которая проходит через точку $A(-3,-4,4,-1)^T$, пересекает аффинное подпространство

$$\pi: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

и перпендикулярна π.

Решение: Пусть $B(1,0,-1,1)^T$ — некоторая точка пространства π. Направляющий вектор искомой прямой будет равен ортогональной составляющей вектора $\overline{AB}$ на подпространство U, направляющее подпространство π. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\overline{AB}\{4,4,-5,2\}$. Пусть

$$\overline{AB} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in U, \, \boldsymbol{z} \in U^{\perp},$$
$$\overline{AB} = \lambda_1 \boldsymbol{l} + \lambda_2 \boldsymbol{m} + \boldsymbol{z},$$

где $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ — базис направляющего подпространства U, то есть

$$\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим отношение

$$\overline{AB} = \lambda_1 \boldsymbol{l} + \lambda_2 \boldsymbol{m} + \boldsymbol{z}$$

скалярно на $\boldsymbol{l}$, получим

$$(\overline{AB}, \boldsymbol{l}) = \lambda_1 (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l}) + \lambda_2 (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{l})$$

$$7 = \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 7 + 0.$$

При умножении этого же соотношения скалярно на $\boldsymbol{m}$ получаем

$$(\overline{AB}, \boldsymbol{m}) = \lambda_1(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}) + \lambda_2(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{m})$$

$$13 = \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 10 + 0.$$

Получаем систему уравнений для определения λ_i:

$$\begin{cases} 7\lambda_1 + 7\lambda_2 = 7, \\ 7\lambda_1 + 10\lambda_2 = 13, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Таким образом,

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{m} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{z} = \overline{AB} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\boldsymbol{z}$ равен ортогональной составляющей вектора $\overline{AB}$ на подпространство U, а значит, является направляющим вектором искомой прямой. Таким образом, уравнение этой прямой имеет вид

$$l\colon \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти расстояние от точки $A(4, 1, -4, -5)^T$ до аффинного подпространства

$$\pi\colon \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Расстояние от точки до подпространства определяется как расстояние от вектора $\overline{AB}$ до линейного пространства U, где точка B принадлежит π. Пусть $B(3, -2, 1, 5)^T$, тогда $\overline{AB}\{-1, -3, 5, 10\}$. Рассмотрим два метода нахождения расстояния от вектора $\overline{AB}$ до подпространства U.

Первый метод. С помощью матрицы Грама. Квадрат расстояния от точки до подпространства определяется по формуле

$$\rho^2(\overline{AB}, U) = \frac{\det G(\overline{AB}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})}{\det G(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})},$$

где $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\}$, $G(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ — матрица Грама системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$. Напомню, что для нахождения матрицы Грама системы векторов, заданных в ортономированном базисе, достаточно применить формулу $A^T A$, где A — матрица, в которой координаты векторов $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ записаны по столбцам.

Введем обозначения

$$A_1 = [\overline{AB}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}], \quad G_1 = A_1^T A_1, \quad A_2 = [\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}], \quad G_2 = A_2^T A_2.$$

Таким образом, квадрат искомого расстояния определяется по формуле

$$\rho^2(\overline{AB}, U) = \frac{\det G_1}{\det G_2}.$$

В данном случае получим:

$$A_1 = [\overline{AB}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & -41 & 28 \\ -41 & 21 & 1 \\ 28 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

Определитель полученной матрицы равен $\det G_1 = 15725$.

$$A_2 = [\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & 30 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу G_2 можно не вычислять отдельно. Если координаты вектора $\overline{AB}$ записаны в матрице A_1 в первом столбце, в качестве G_2 достаточно взять матрицу, полученную из матрицы G_1 вычеркиванием первой строки и первого столбца. Аналогично, если координаты вектора $\overline{AB}$ записаны в матрице A_1 в последнем столбце, в качестве G_2 достаточно взять матрицу, полученную из матрицы G_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Определитель полученной матрицы равен $\det G_2 = 629$.

Таким образом,

$$\rho^2(\overline{AB}, U) = \frac{\det G_1}{\det G_2} = \frac{15725}{629} = 25 \quad \Rightarrow \quad \rho(\overline{AB}, U) = 5.$$

Второй метод. С помощью нахождения длины ортогональной составляющей.

Пусть

$$\overline{AB} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \lambda_1 \boldsymbol{l} + \lambda_2 \boldsymbol{m} + \boldsymbol{z},$$

где $\boldsymbol{y} \in U$ — ортогональная проекция, а $\boldsymbol{z} \in U^\perp$ — ортогональная составляющая вектора $\overline{AB}$ на подпространство U. Умножив последнее соотношение скалярно на $\boldsymbol{l}$, получим уравнение

$$-41 = 21\lambda_1 + \lambda_2.$$

Аналогично, умножив это соотношение скалярно на $\boldsymbol{m}$, получим уравнение

$$28 = \lambda_1 + 30\lambda_2.$$

Напомню, что $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = 0$ для любого $\boldsymbol{u} \in U$ в силу ортогональности U и ее ортогональной составляющей.

Решением системы

$$\begin{cases} -41 = 21\lambda_1 + \lambda_2, \\ 28 = \lambda_1 + 30\lambda_2 \end{cases}$$

являются числа

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{z} = \overline{AB} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\rho(\overline{AB}, U) = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{1+4+4+16} = 5.$$

Задача 3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти расстояние между аффинными подпространствами

$$\pi_1\colon \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \pi_2\colon \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для нахождения расстояния между подпространствами нужно найти расстояние от вектора $\overline{AB}$ до подпространства $U + W$.

Найдем сначала базис линейного подпространства $U + W$. Для этого определим ранг матрицы, в которой векторы базиса подпространств U и W записаны по столбцам.

$$\mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

В качестве базиса $U + W$ выберем векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\overline{AB}$ равны $\overline{AB}\{-3, -7, -2, -5\}$, где

$$A(4, 5, 3, 2)^T, \; B(1, -2, 1, -3)^T.$$

Найдем расстояние от вектора $\overline{AB}$ до подпространства $U+W$ помощью формулы через определитель матрицы Грама (первый метод). В нашем случае

$$A_1 = [\overline{AB}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A_1 равен $\det A_1 = 45$, а значит, определитель матрицы Грама $\det G_1 = \det(A_1^T A_1) = (\det A_1)^2 = 45^2$. Саму матрицу можно не вычислять, ведь нам достаточно знать ее определитель. Далее,

$$A_2 = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 8 \\ 4 & 13 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы G_2 равен $\det G_2 = 225 = 15^2$. Поскольку матрица A_2 не является квадратной, пришлось вычислить матрицу G_2 и ее определитель. Итак,

$$\rho^2(\overline{AB}, U+W) = \frac{\det G_1}{\det G_2} = \frac{45^2}{15^2} = 3^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(\overline{AB}, U+W) = 3.$$

Задача 4. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Показать, что пространства не пересекаются.
в) Найти расстояние между ними.

Решение: а) Чтобы найти параметрическое задание подпространства L, решим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases}$$

Расширенная матрица системы равна

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|c} 4 & 1 & 0 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \end{array} \right).$$

Полагая свободные переменные x_1 и x_4 равными

$$x_1 = t_1, \quad x_4 = 2t_2,$$

получим

$$L\colon \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для нахождения параметрического вида подпространства N, решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы равна

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}-4\\-2\end{matrix} & \begin{matrix}8\\5\end{matrix} \end{array}\right).$$

Полагая свободные переменные x_2 и x_4 равными

$$x_2 = -2t_1, \quad x_4 = t_2,$$

получим

$$L\colon \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Чтобы определить, пересекаются ли подпространства, решим СЛАУ, полученную объединением систем уравнений, задающих неявно подпространства L и N:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6/5 \end{array}\right).$$

Последние две строки позволяют установить, что подпространства не пересекаются, $\dim(U+W) = 3$, степень параллельности подпространств равна 1.

в) В качестве базиса пространства $U + W$ возьмем векторы

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{AB}$ равен $\overline{AB}\{4, -15, -1, 0\}$. Найдем расстояние между подпространствами, используя формулу

$$\rho^2(\overline{AB}, U + W) = \frac{\det G(\overline{AB}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})}{\det G(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})}.$$

Используем обозначения

$$A_1 = [\overline{AB}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}], \quad G_1 = A_1^T A_1, \quad A_2 = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}], \quad G_2 = A_2^T A_2.$$

Имеем

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -15 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -27 & 0 \\ -27 & 49 & 8 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

причем $\det(G_2) = 225$. В итоге имеем

$$\rho^2(\overline{AB}, U+W) = \frac{(\det A_1)^2}{\det G_2} = \frac{45^2}{15^2} = 3^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(\overline{AB}, U+W) = 3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти прямую, которая проходит через точку $A(2,2,5,3)^T$, пересекает аффинное подпространство

$$\pi\colon \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 10, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$$

и перпендикулярна π.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти расстояние от точки $A(4,2,-5,1)^T$ до аффинного подпространства, заданного в $\mathbb{R}^4$ системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Ответ: 5.

Задача 3. Найти расстояние между аффинным подпространством

$$\pi\colon \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

и прямой

$$l\colon \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Задача 4. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 20, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 4, \end{cases} \qquad N\colon \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Показать, что пространства не пересекаются.
в) Найти расстояние между ними.

Ответ: а) $L\colon \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N\colon \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, в) $\sqrt{2/3}$.