Семинар 26. Подготовка к РК3

§1. Задача 1

Задача 1.1. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \end{cases} \qquad N\colon\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Пересекаются ли эти подпространства?
в) Если L и N пересекаются, найти размерности их суммы и пересечения, а также параметрическое задание подпространства $L \cap N$ и неявное задание подпространства $L + N$; если L и N не пересекаются, найти расстояние между ними.

Решение: а) Параметрическое задание подпространств L можно найти, решив систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \end{cases}$$

Расширенная матрица системы равна

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}-1\\2\end{matrix} & \begin{matrix}4\\-1\end{matrix} \end{array}\right).$$

Пусть свободные переменные равны

$$x_2 = t_1, \quad x_4 = t_2,$$

и тогда общее решение этой системы записывается в виде

$$L\colon\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, параметрическое задание подпространства N имеет вид

$$N\colon\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) Чтобы установить, пересекаются ли эти подпространства, удобнее использовать их общие уравнения. Объединим эти уравнения в систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Выбрав в качестве базисных переменных x_1, x_2, x_3 и полагая свободную переменную равной $x_4 = 3t - 1$, получим параметрическое задание пространства пересечения в виде

$$L \cap N\colon \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку система (1) совместна, пространства пересекаются.

в) Кроме того, решив систему (1), мы нашли параметрическое задание подпространства $L \cap N$. Размерность $\dim(L \cap N)$ переечения равна 1. По формуле Грассмана:

$$\dim(L + N) = \dim L + \dim N - \dim(L \cap N) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Чтобы найти неявное задание подпространства $L + N$, запишем векторы базиса направляющих подпространств L и N, найденные в пункте а), по строкам, и решим однородную систему

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \right).$$

Выбрав в качестве базисных переменных x_1, x_2, x_3 и полагая $x_4 = c$, получим общее решение этой системы

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Координаты полученного вектора — это коэффициенты уравнения направляющего подпространства $L + N$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Подставим координаты точки $A(2, 0, 1, 0)^T$, $B(0, 1, 0, 0)^T$ или $C(0, 1, 1, -1)^T$ в правую часть и получим неявное задание подпространства $L + N$:

$$L + N\colon \ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Замечание. В том случае, если бы пространства пересекались в одной точке, то если бы система вида (1) имела единственное решение, в качестве неявного задания $L + N$ можно выбрать уравнение

$$0 = 0,$$

поскольку в этом случае размерность $L + N$ равна 4, что означает, что $L + N = \mathbb{R}^4$.

Задача 1.2. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства

$$L\colon \ \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases} \qquad N\colon \ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

а) Найти параметрическое задание подпространств L и N.
б) Пересекаются ли эти подпространства?

в) Если L и N пересекаются, найти размерности их суммы и пересечения, а также параметрическое задание подпространства $L \cap N$ и неявное задание подпространства $L + N$; если L и N не пересекаются, найти расстояние между ними.

Решение: а) Чтобы найти параметрическое задание подпространства L, решим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases}$$

Расширенная матрица системы равна

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|c} 4 & 1 & 0 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right).$$

Полагая свободные переменные равными

$$x_1 = t_1, \quad x_4 = 2t_2,$$

получим

$$L\colon \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для нахождения параметрического вида подпространства N, решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы равна

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c} 2 & 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right).$$

Полагая свободные переменные равными

$$x_2 = -2t_1, \quad x_4 = t_2,$$

получим

$$L\colon \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) Чтобы определить, пересекаются ли подпространства, решим СЛАУ, которая получена объединением уравнением, задающими неявно подпространства L и N:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6/5 \end{array}\right).$$

Последние две строки позволяют установить, что подпространства не пересекаются, $\dim(U+W)=3$, степень параллельности подпространств равна 1.

в) В качестве базиса пространства $U+W$ возьмем векторы (их количество определяется размерностью пространства $U+W$):

$$\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}0\\6\\3\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{AB}$ равен $\overline{AB}\{4,-15,-1,0\}^T$. Найдем расстояние между подпространствами, используя формулу

$$\rho^2(\overline{AB},U+W)=\frac{\det G(\overline{AB},\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})}{\det G(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})}.$$

Введем обозначения

$$A_1=[\overline{AB},\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}],\quad G_1=A_1^TA_1,\quad A_2=[\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}],\quad G_2=A_2^TA_2.$$

Имеем

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}4&1&0&2\\-15&-4&6&0\\1&-1&3&2\\0&0&2&1\end{vmatrix}=-45.$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\-4&6&0\\-1&3&2\\0&2&1\end{pmatrix},\quad G_2=A_2^TA_2=\begin{pmatrix}1&-4&-1&0\\0&6&3&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-4&6&0\\-1&3&2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-27&0\\-27&49&8\\0&8&9\end{pmatrix},$$

причем $\det(G_2)=225$. В итоге имеем

$$\rho^2(\overline{AB},U+W)=\frac{(\det A_1)^2}{\det G_2}=\frac{45^2}{15^2}=3^2\quad\Rightarrow\quad\rho(\overline{AB},U+W)=3.$$

Замечание. В данном случае матрицу G_1 можно не вычислять, поскольку матрица A_1 квадратная, и определитель матрицы G_1 равен квадрату определителя матрицы A_1. Эта матрица равна

$$G_1=A_1^TA_1=\begin{pmatrix}242&63&-87&10\\63&18&-27&0\\-87&-27&49&8\\10&0&8&9\end{pmatrix},$$

и тогда не пришлось бы вычислять матрицу G_2, ведь она получается из матрицы G_1 вычеркиванием первой строки и первого столбца.

§2. Задача 2

Задача 2.1. Кривая задана на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$7x^2-48xy-7y^2+62x-34y+48=0.$$

а) Найти собственные числа и ортонормированный базис из собственных векторов для соответствующей квадратичной формы,

б) Привести уравнение кривой к каноническому виду, указать соответствующую замену координат и определить тип кривой,
в) Построить кривую в исходной системе координат.

Решение: а) Квадратичной формой в этом уравнении является

$$q(x,y) = 7x^2 - 48xy - 7y^2$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами матрицы A являются числа $\lambda_1 = -25$, $\lambda_2 = 25$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -25$, находится из решения однородной системы линейных уравнений

$$A + 25E = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

В качестве фундаментальной системы решений можно взять вектор

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = 25$ получаем однородную СЛАУ

$$A - 25E = \begin{pmatrix} -18 & -24 \\ -24 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

и решение

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти векторы ортогональны (собственные векторы симметричной матрицы, отвечающие различным собственным значениям, должны быть ортогональны, этот факт можно использовать в качестве самопроверки). Нормируем эти векторы:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\|\boldsymbol{v_2}\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица замены координат — это матрица перехода к базису $(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$:

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы старая и новая система координат были одинаково ориентированы, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был равен 1. В данном случае это выполнено. В случае, если бы это условие не выполнялось, нужно было заменить один из векторов на противоположный.

Таким образом, замена переменных в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}y_1, \\ y = \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1. \end{cases}$$

Квадратичная форма преобразуется к каноническому виду

$$-25x_1^2 + 25y_1^2,$$

где перед квадратами переменных стоят собственные числа матрицы квадратичной формы. Найдем новую линейную часть, выполнив указанную замену координат в линейной части:

$$62x - 34y = 62\left(\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}y_1\right) - 34\left(\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1\right) = 10x_1 - 70y_1.$$

Итак, в новых переменных уравнение кривой запишется в виде

$$-25x_1^2 + 25y_1^2 + 10x_1 - 70y_1 + 48 = 0.$$

Выделим полный квадрат по переменным x_1, y_1:

$$-25\left(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{25}\right) + 1 + 25\left(y_1^2 - \frac{14}{5}y_1 + \frac{49}{25}\right) - 49 + 48 = 0.$$

$$-25\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 + 25\left(y_1 - \frac{7}{5}\right)^2 = 0.$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{7}{5}\right)^2 = 0.$$

Затем сделаем вторую замену:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{1}{5}, \\ y_2 = y_1 - \frac{7}{5}. \end{cases}$$

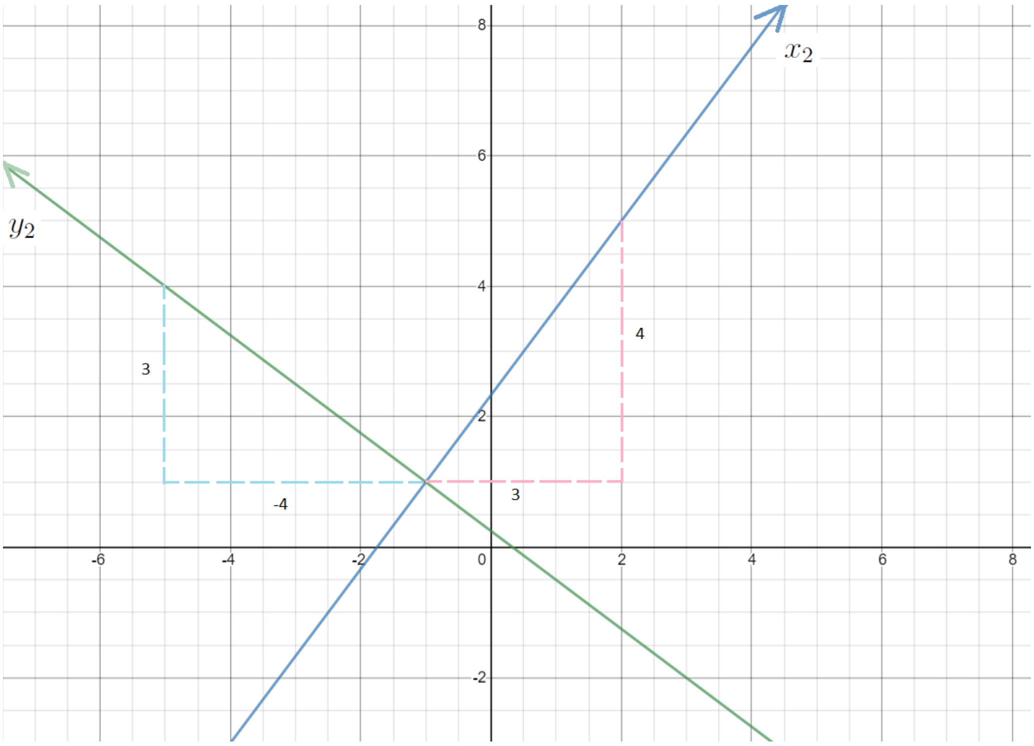
В результате уравнение кривой преобразуется к виду

$$x_2^2 - y_2^2 = 0$$

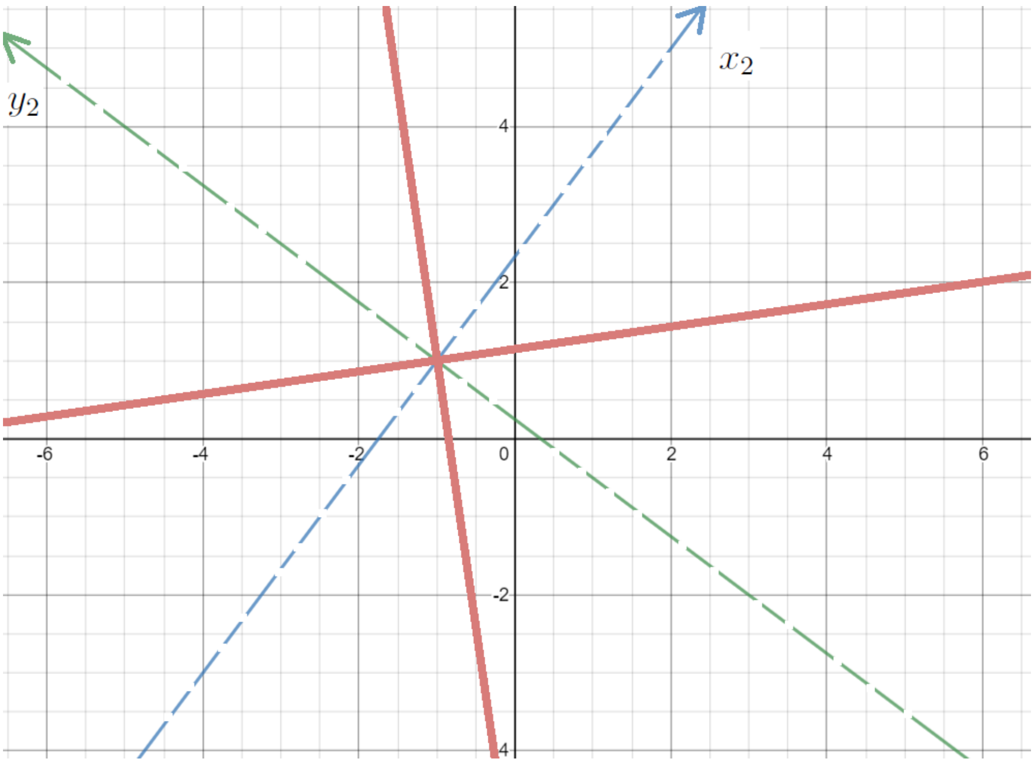
Это кривая гиперболического типа. Данный случай является вырожденным, и график этой кривой на самом деле образуют две пересекающиеся прямые. Найдем также связь канонических координат x_2, y_2 с исходными x, y. Для этого применим последовательно две указанные замены переменных. В результате получим

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}\left(x_2 + \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5}\left(y_2 + \frac{7}{5}\right), \\ y = \frac{4}{5}\left(x_2 + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(y_2 + \frac{7}{5}\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{5}x_2 - \frac{4}{5}y_2 - 1 \\ y = \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}y_2 + 1. \end{cases}$$

в) Построим кривую в исходной системе координат. Начало канонической системы координат имеет координаты $(0, 0)$ в системе координат (x_2, y_2). С помощью полученной замены переменных найдем начало координат в исходной системе координат: $x = -1, y = 1$. Во-вторых, оси канонической системы координат будут направлены по собственным векторам $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$, поскольку за поворот системы координат отвечает ортогональное преобразование квадратичной формы. Изобразим положение системы координат на чертеже.



Осталось только изобразить пару прямых $x_2 = y_2$, $x_2 = -y_2$ в канонической системе координат:



§3. Задача 3

Задача 3.1. Поверхность задана в пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 4x + 16y + 4z - 26.$$

а) Найти собственные числа и ортонормированный базис из собственных векторов соответствующей квадратичной формы, б) Привести уравнение поверхности к каноническому виду, указать соответствующую замену координат и определить тип поверхности.

Решение: а) Квадратичной формой в этом уравнении является

$$q(x, y, z) = 3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A равны $\lambda_1 = -10$ (кратности 1) и $\lambda_{2,3} = 4$ (кратности 2).

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -10$, находится из решения однородной СЛАУ с матрицей

$$A + 10E = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Получим собственный вектор

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda_{2,3} = 4$, получим однородную СЛАУ с матрицей

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Выбирая в качестве базисной переменной x_1, находим собственные векторы в виде

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы не ортогональны друг другу. Значит, для получения ортогонального базиса придется применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{v_3} - \frac{(\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{b_2})}{(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_2})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Нормируем векторы:

$$\boldsymbol{f_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_2} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_3} = \frac{\boldsymbol{b_3}}{\|\boldsymbol{b_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из ортонормированных собственных векторов (матрицу перехода к новому базису)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен -1, что означает, что векторы образуют левую тройку. Поэтому заменим вектор $\boldsymbol{f_3}$ на $-\boldsymbol{f_3}$ (чтобы в матрице было меньше знаков минус) и тогда

$$\boldsymbol{f_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f_3} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$$

и

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}.$$

Замечание. На самом деле, можно не использовать процедуру ортогонализации, а поступить следующим образом. После нахождения собственного вектора, соответствующего простому корню и одному из собственных векторов, соответствующих кратному корню, третий вектор можно найти как векторное произведение полученных двух. При правильной расстановке векторов можно будет гарантировать, что полученная тройка векторов будет образовывать правый ортонормированный базис.

б) Итак, получаем следующую замену координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{14}}x_1 - \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{35}}z_1, \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}}x_1 - \frac{5}{\sqrt{35}}z_1, \\ z = \frac{3}{\sqrt{14}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{35}}z_1. \end{cases}$$

Запишем квадратичную форму в каноническом виде

$$q(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = -10x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2$$

Преобразуем линейную часть уравнения поверхности:

$$-4x + 16y + 4z = -4\left(\frac{1}{\sqrt{14}}x_1 - \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{35}}z_1\right) + 16\left(\frac{2}{\sqrt{14}}x_1 - \frac{5}{\sqrt{35}}z_1\right) +$$

$$+4\left(\frac{3}{\sqrt{14}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{35}}z_1\right) = 20\sqrt{\frac{2}{7}}x_1 + 8\sqrt{\frac{2}{5}}y_1 - 72\sqrt{\frac{1}{35}}z_1.$$

Таким образом, уравнение поверхности в координатах (x_1, y_1, z_1) имеет вид

$$-10x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 + 20\sqrt{\frac{2}{7}}x_1 + 8\sqrt{\frac{2}{5}}y_1 - 72\sqrt{\frac{1}{35}}z_1 - 26 = 0.$$

Выделим полные квадраты по переменным x_1, y_1, z_1 и запишем уравнение в виде

$$-10\left(x_1 - \sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + 4\left(z_1 - \frac{9}{\sqrt{35}}\right)^2 = 34.$$

Преобразование параллельного переноса имеет вид

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \sqrt{\frac{2}{7}}, \\ y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{5}}, \\ z_2 = z_1 - \frac{9}{\sqrt{35}} \end{cases},$$

а полученное уравнение поверхности

$$-10x_2^2 + 4y_2^2 + 4z_2^2 = 34.$$

Это однополостный гиперболоид.

Найдем результирующее преобразование координат, связывающее исходные и канонические координаты:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(x_2 + \sqrt{\frac{2}{7}}\right) - \frac{3}{\sqrt{10}}\left(y_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{35}}\left(z_2 + \frac{9}{\sqrt{35}}\right), \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}}\left(x_2 + \sqrt{\frac{2}{7}}\right) - \frac{5}{\sqrt{35}}\left(z_2 + \frac{9}{\sqrt{35}}\right), \\ z = \frac{3}{\sqrt{14}}\left(x_2 + \sqrt{\frac{2}{7}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}}\left(y_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) + \frac{3}{\sqrt{35}}\left(z_2 + \frac{9}{\sqrt{35}}\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{14}}x_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{35}}z_2 + 1, \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}}x_2 - \frac{5}{\sqrt{35}}z_2 - 1, \\ z = \frac{3}{\sqrt{14}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{35}}z_2 + 1. \end{cases}$$