Семинар 27. Аффинные преобразования

§1. Понятие аффинного преобразования

Пусть $(\mathbb{A}, V)$ и $(\mathbb{B}, W)$ — два аффинных пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$. *Аффинным отображением* из пространства $(\mathbb{A}, V)$ в пространство $(\mathbb{B}, W)$ называется пара (F, φ), где $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ — отображение множества $\mathbb{A}$ в множество $\mathbb{B}$, $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство W, и для любых точек $P, Q \in \mathbb{A}$ если $\boldsymbol{x} = \overline{PQ} \in V$, то $\varphi(\boldsymbol{x}) = \overline{F(P)F(Q)} \in W$. *Аффинным преобразованием* аффинного пространства $(\mathbb{A}, V)$ мы будем называть аффинное отображение этого пространства в себя. Линейное отображение (оператор) φ называется *линейной частью* или *дифференциалом* аффинного отображения (преобразования) (F, φ).

Любое аффинное отображение однозначно определяется своей линейной частью и образом одной точки пространства $\mathbb{A}$. А именно, если O — некоторая фиксированная, P — произвольная точка пространства $\mathbb{A}$, то образ точки P под действием аффинного отображения F может быть найден по формуле

$$F(P) = F(O) + \varphi(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{x} = \overline{OP}$.

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением аффинных преобразований. Если $(O, \boldsymbol{e})$ — аффинная система координат в аффинном пространстве $(\mathbb{A}, V)$, то возникает вопрос о координатном описании аффинного преобразования (F, φ). Пусть известен вектор-столбец

$$b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{K}^n$$

координат точки $F(O)$ в системе $(O, \boldsymbol{e})$ и матрица $A \in M_n(\mathbb{K})$ линейного оператора φ в базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда координаты образа точки $P \in \mathbb{A}$ под действием преобразования F могут быть найдены по формуле

$$y = Ax + b,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — координаты точки P, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ — координаты точки $F(P)$ в системе координат $(O, \boldsymbol{e})$.

Везде в дальнейших задачах предполагается, что система координат является прямоугольной.

Задача 1. Найти аффинное преобразование плоскости, которое переводит точки $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(0,0)$ в точки $A'(3,7)$, $B'(4,6)$, $C'(-1,2)$ соответственно.

Решение: При таком преобразовании векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ переходят в векторы $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$ соответственно, то есть

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{A'B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{A'C'} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

или

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$

откуда матрица линейной части φ может быть найдена как

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти свободные члены преобразования (образ начала координат), достаточно взять координаты одной из пар точек и подставить в систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y + b_1, \\ y' = x + 2y + b_2. \end{cases}$$

Например, известно, что точка $C(0,0)$ переходит в точку $C'(-1,2)$, откуда

$$b_1 = -1, \quad b_2 = 2.$$

Следовательно, искомое аффинное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 1, \\ y' = x + 2y + 2. \end{cases}$$

Задача 2. Найти уравнение прямой, в которую переходит прямая

$$x + 2y - 1 = 0$$

при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} x' = x + 4y - 7, \\ y' = x + 3y + 1. \end{cases}$$

Решение: Выразив x и y через x' и y' с помощью формул, задающих аффинное преобразование, получим

$$\begin{cases} x = -3x' + 4y' - 25, \\ y = x' - y' + 8, \end{cases}$$

откуда, подставив это выражение в уравнение прямой, имеем

$$x + 2y - 1 = -3x' + 4y' - 25 + 2(x' - y' + 8) - 1 = -x' + 2y' - 10 = 0.$$

Таким образом, при этом аффинном преобразовании данная прямая переходит в прямую

$$-x + 2y - 10 = 0.$$

Задача 3. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором каждая точка евклидовой плоскости переходит в точку, которая является ее ортогональной проекцией на прямую

$$3x + 4y + 1 = 0.$$

Решение: Если каждая точка переходит в свою ортогональную проекцию на эту прямую, то и каждый вектор на плоскости переходит в векторную ортогональную проекцию этого вектора на указанную прямую. Вектор нормали к данной прямой равен $\boldsymbol{n}(3,4)$. Напомню, что проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l, заданную нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, вычисляется по формуле[1]

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})} \boldsymbol{n}.$$

[1] Эта формула аналогична формуле вычисления проекции вектора на плоскость, заданную нормальным вектором $\boldsymbol{n}$.

Вычислим проекции векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{i'} = \boldsymbol{i} - \frac{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{j'} = \boldsymbol{j} - \frac{(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейная часть аффинного преобразования задается матрицей

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения свободных членов аффинного преобразования выберем какую-нибудь точку на заданной прямой, скажем, $M(1,-1)$. Вектор $\overline{MO}(-1,1)$, где точка O есть начало координат, под действием проекции на прямую переходит в вектор

$$\overline{MO'} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Координаты точки O' могут быть найдены по формуле

$$O' = M + \overline{MO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомое аффинное преобразование определяется формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{16}{25}x - \frac{12}{25}y - \frac{3}{25}, \\ y' = -\frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{4}{25}. \end{cases}$$

Замечание. Свободные члены этого аффинного преобразовавания могут быть также найдены из простого геометрического соображения: в результате искомого преобразования все точки прямой

$$3x + 4y + 1 = 0$$

должны переходить в себя. Например, точка $M(1,-1)$ переходит в точку $M(1,-1)$. Значит, числа b_1, b_2 можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 = \frac{16}{25}\cdot 1 - \frac{12}{25}\cdot(-1) + b_1, \\ -1 = -\frac{12}{25}\cdot 1 + \frac{9}{25}\cdot(-1) + b_2, \end{cases}$$

откуда

$$b_1 = -\frac{3}{25}, \quad b_2 = -\frac{4}{25}.$$

Задача 4. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором каждая точка евклидовой плоскости переходит в точку, симметричную относительно прямой

$$3x + 4y + 1 = 0.$$

Решение: Вектор нормали к этой прямой равен $\boldsymbol{n}(3,4)$. Напомню, что вектор $\boldsymbol{a'}$, симметричный вектору $\boldsymbol{a}$ относительно прямой l с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{a} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Вычислим образы векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i} - \frac{2(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{6}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}7\\-24\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} - \frac{2(\boldsymbol{j},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{8}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-24\\-7\end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейная часть аффинного преобразования задается матрицей

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & -24\\-24 & -7\end{pmatrix}.$$

Для нахождения свободных членов аффинного преобразования выберем какую-нибудь точку на заданной прямой, скажем, $M(1,-1)$. Вектор $\overline{MO}(-1,1)$ под действием преобразования переходит в вектор

$$\overline{MO'} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & -24\\-24 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-31\\17\end{pmatrix}.$$

Координаты точки O' могут быть найдены по формуле

$$O' = M + \overline{MO'} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-31\\17\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомое аффинное преобразование определяется формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - \frac{6}{25},\\ y' = -\frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y - \frac{8}{25}.\end{cases}$$

Задача 5. Найти аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$, которое состоит в повороте на 180° вокруг прямой, заданной общими уравнениями $z = x-2$, $y=0$.

Решение: Параметрически прямую можно задать следующим образом:

$$\begin{cases} x = t,\\ y = 0,\\ z = t-2.\end{cases}$$

Направляющий вектор этой прямой равен $\boldsymbol{l} = (1,0,1)^T$. Геометрически можно установить, в какие векторы при таком отображении переходят векторы стандартного базиса:

$$\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \to -\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k} \to \boldsymbol{i},$$

а значит, матрица линейной части преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти свободные члены преобразования можно, зная неподвижные точки преобразования. Действительно, все точки указанной прямой переходят в себя. Например, образом точки $P(0,0,-2)$ является точка P, откуда

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -2.$$

Следовательно, аффинное преобразование задается формулами

$$\begin{cases} x' = z + 2, \\ y' = -y, \\ z' = x - 2. \end{cases}$$

Задача 6. Аффинное преобразование (F, φ) евклидова аффинного пространства $\mathbb{R}^3$ действует как композиция симметрии относительно плоскости

$$\alpha\colon 2x + 2y + z = 5$$

и гомотетии с центром в точке $(-1, -1, -1)$ и коэффициентом 2, относительно некоторой прямоугольной системы координат $(O, \boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\})$. Найти координатную запись преобразования F в той же системе $(O, \boldsymbol{e})$.

Решение: Можно либо сразу найти образ начала координат (что даст вектор сдвига b) под действием F и образы векторов базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (что даст матрицу A) под действием φ, либо сначала найти запись преобразования симметрии, затем гомотетии, и найти композицию преобразований. Мы пойдём по второму пути.

Вектор нормали к этой плоскости равен $\boldsymbol{n}(2, 2, 1)$. Вектор $\boldsymbol{a'}$, симметричный вектору $\boldsymbol{a}$ относительно плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{a} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Вычислим образы векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{i'} = \boldsymbol{i} - \frac{2(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{j'} = \boldsymbol{j} - \frac{2(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{k'} = \boldsymbol{k} - \frac{2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейная часть аффинного преобразования задается матрицей

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения свободных членов аффинного преобразования выберем какую-нибудь точку на заданной плоскости, скажем, $M(1, 1, 1)$. Вектор $\overline{MO}$ с координатами $(-1, -1, -1)$ под действием преобразования переходит в вектор

$$\overline{MO'} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты точки O' могут быть найдены по формуле

$$O' = M + \overline{MO'} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}11\\11\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}20\\20\\10\end{pmatrix}.$$

Таким образом, аффинное преобразование симметрии определяется формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{20}{9}, \\ y' = -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{4}{9}z + \frac{20}{9}, \\ z' = -\frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{10}{9} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь отдельно второе преобразование — гомотетию θ с центром в точке $(-1,-1,-1)$ и коэффициентом 2 . Линейная часть гомотетии с коэффициентом 2 имеет матрицу $2E$. Начало координат под действием θ переходит в точку $(1,1,1)$. Таким образом, гомотетия θ переводит точку $Q(x',y',z')$ в точку $R(x'',y'',z'')$ с координатами

$$\begin{cases} x'' = 2x' + 1, \\ y'' = 2y' + 1, \\ z'' = 2z' + 1. \end{cases}$$

Подставляя формулы, выражающие образ гомотетии в формулы, выражающие симметрию относительно плоскости, получим

$$\begin{cases} x'' = \frac{2}{9}x - \frac{16}{9}y - \frac{8}{9}z + \frac{49}{9}, \\ y'' = -\frac{16}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{8}{9}z + \frac{49}{9}, \\ z'' = -\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{14}{9}z + \frac{29}{9}. \end{cases}$$

§2. Неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования на плоскости

Аффинное подпространство π аффинного пространства $\mathbb{A}$ называется *инвариантным* относительно аффинного преобразования (F,φ), если $\varphi\pi \subset \pi$. *Инвариантные* (или *неподвижные*) точки аффинного преобразования переходят в себя.

Задача 7. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 7x - y + 1, \\ y' = 4x + 2y + 4. \end{cases}$$

Решение: Условие инвариантности точек задается формулами $x' = x$, $y' = y$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 7x - y + 1, \\ y = 4x + 2y + 4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6x - y + 1 = 0, \\ 4x + y + 4 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -2,$$

то есть точка $A(-\frac{1}{2}, -2)$ является неподвижной (или инвариантной) точкой преобразования.

Направления инвариантных прямых совпадают с направлением собственных векторов матрицы линейной части аффинного преобразования. Найдем собственные числа и собственные векторы этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0.$$

Собственные числа матрицы равны

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 3$. Имеем

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 7-3 & -1 \\ 4 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix},$$

и в качестве собственного вектора можно взять

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 6$, находится из системы

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 7-6 & -1 \\ 4 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix},$$

и в качестве собственного вектора можно взять

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Неподвижная точка должна принадлежать обоим инвариантным подпространствам аффинного преобразования. Таким образом, эта точка является точкой пересечения инвариантных прямых. Следовательно, инвариантными прямыми отображения являются

$$l_1\colon \quad \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y+2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x - y = 0.$$

$$l_2\colon \quad \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y+2}{1} \quad \Rightarrow \quad x - y - \frac{3}{2} = 0.$$

Задача 8. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 1, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Решение: Нетрудно убедиться, что неподвижных точек аффинное преобразование не имеет. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы линейной части преобразования.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Собственные числа матрицы равны

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$, равен

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 2$, равен

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем инвариантные прямые, параллельные первому собственному вектору. Пусть (a, b) — некоторая точка на такой прямой, то есть параметрическое уравнение инвариантной прямой имеет вид

$$\begin{cases} x = a + t, \\ y = b - t \end{cases}$$

В результате аффинного преобразования эта точка переходит в точку

$$\begin{cases} x' = 2a + b - 1, \\ y' = b + 1, \end{cases}$$

но остается на заданной прямой, то есть верна система уравнений

$$\begin{cases} 2a + b - 1 = a + t, \\ b + 1 = b - t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = t + 1, \\ 0 = -1 - t \end{cases}$$

для некоторого параметра t. Выясним совместность этой СЛАУ при произвольном t:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 + t \\ 0 & 0 & -1 - t \end{array}\right).$$

Она совместна при $t = -1$. Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 + (-1) \\ 0 & 0 & -1 + 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \end{array}\right).$$

Пусть $a = 1$, $b = -1$, тогда уравнение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + y = 0$$

задает инвариантную прямую.

Аналогично, найдем инвариантные прямые, параллельные второму собственному вектору. Пусть (a, b) — некоторая точка на такой прямой. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 2a + b - 1 = a + t, \\ b + 1 = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = t + 1, \\ 0 = -1. \end{cases}$$

Система несовместна при любом t. Значит, нет прямых, параллельных этому собственному вектору и

$$x + y = 0$$

— единственная инвариантная прямая этого аффинного преобразования.

Задача 9. Дано аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 12, \\ y' = 4x - 3y + 6. \end{cases}$$

На прямой

$$7x - 2y - 24 = 0$$

найти точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, лежащую на этой прямой.

Решение: Зададим прямую параметрически. Точка $A(2, -5)$ — произвольная точка на этой прямой. Тогда

$$7(x-2) - 2(y+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{7} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -5 + 7t. \end{cases}$$

При некотором t точка на этой прямой переходит в точку, также лежащую на этой прямой. Образ точки с параметром t при заданном аффинном преобразовании имеет вид

$$\begin{cases} x' = 3(2+2t) + 4(-5+7t) - 12 = 34t - 26, \\ y' = 4(2+2t) - 3(-5+7t) + 6 = -13t + 29. \end{cases}$$

Полученная точка также лежит на данной прямой, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению

$$7x - 2y - 24 = 0.$$

Получим

$$7x - 2y - 24 = 7(34t - 26) - 2(-13t + 29) - 24 = 0.$$

Решив уравнение, получим $t = 1$. Значит, искомая точка имеет координаты

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 1 = 4, \\ y = -5 + 7 \cdot 1 = 2. \end{cases}$$

Задача 10. Найти такое аффинное преобразование, для которого все точки оси Ox являются инвариантными, а точка $A(2, 6)$ переходит в точку $A'(-1, -4)$.

Решение: Пусть

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{cases}$$

есть искомое аффинное преобразование. Поскольку точки оси Ox являются инвариантными, образ точки с координатами $(x, 0)$ есть точка $(x, 0)$. Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12} \cdot 0 + b_1, \\ 0 = a_{21}x + a_{22} \cdot 0 + b_2, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = a_{11}x + b_1, \\ 0 = a_{21}x + b_2. \end{cases}$$

Такая система уравнений должна быть выполнена для любого числа x. В частности, подставляя $x = 0$, получим

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0,$$

а подстановка $x = 1$ дает

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = 0.$$

Значит, искомое аффинное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x' = x + a_{12}y, \\ y' = a_{22}y. \end{cases}$$

Оставшиеся неизвестные a_{12}, a_{22} можно найти, зная, что точка $A(2, 6)$ переходит в точку $A'(-1, -4)$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = 2 + a_{12} \cdot 6, \\ -4 = a_{22} \cdot 6, \end{cases}$$

откуда

$$a_{12} = -\frac{1}{2}, \quad a_{22} = -\frac{2}{3},$$

а искомое аффинное преобразование задается формулами

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2}y, \\ y' = -\frac{2}{3}y. \end{cases}$$

§3. Неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования в пространстве

Принципы нахождения неподвижных точек и инвариантных подпространств аффинного преобразования в пространстве аналогичны нахождению инвариантных подпространств аффинного преобразования на плоскости. В первую очередь нужно найти неподвижные точки преобразования, используя соотношение $F(P) = P$. Направления инвариантных подпространств совпадают с направлениями собственных векторов матрицы линейной части аффинного преобразования.

Задача 11. Найти инвариантные подпространства аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 5x - 5y + 2z + 5, \\ y' = 5x - 6y + 3z + 5, \\ z' = 6x - 9y + 5z + 5. \end{cases}$$

Решение: Для нахождения неподвижных точек аффинного преобразования имеем систему уравнений:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 5y + 2z & = & -5, \\ 5x - 7y + 3z & = & -5, \\ 6x - 9y + 4z & = & -5. \end{array}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & -5 \\ 5 & -7 & 3 & -5 \\ 6 & -9 & 4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -4 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -5 \end{array} \end{array}\right).$$

Полагая свободную переменную $x_3 = 3t+1$, получим $x_2 = 2t-1$, $x_1 = t-3$, откуда следует, что прямая

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

не просто является инвариантной прямой данного аффинного преобразования, но полностью состоит из неподвижных точек. Отсюда, кстати, следует, что число $\lambda_1 = 1$ является собственным числом матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

аффинного преобразования, а вектор

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$$

является собственным вектором, соответствующим этому собственному значению. Другим собственным значением этой матрицы является число $\lambda_2 = 2$. Найдем собственный вектор, соответствующий этому собственному значению:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Опишем все инвариантные подпространства этого преобразования. Во-первых, все неподвижные точки имеют координаты

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Инвариантными прямыми являются, во-первых, уже указанная прямая

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а во-вторых, любая прямая, которая проходит через какую-нибудь неподвижную точку в направлении инвариантного подпространства линейной части аффинного преобразования. Такие прямые можно описать параметрически следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Наконец, следующая плоскость

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является единственным двумерным инвариантным подпространством.

Задача 12. Найти инвариантные подпространства аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = -x - 3y + 4z - 1, \\ y' = 4x - 9y + 8z - 14, \\ z' = 6x - 7y + 5z - 13. \end{cases}$$

Решение: Матрица аффинного преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 8 \\ 6 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения неподвижных точек аффинного преобразования имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -2x - 3y + 4z &= 1, \\ 4x - 10y + 8z &= 14, \\ 6x - 7y + 4z &= 13. \end{aligned}$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что число $\lambda_1 = 1$ является собственным значением матрицы A, а вектор

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_1.

Другим собственным значением является число

$$\lambda_2 = -3$$

кратности 2. Это значит, что инвариантными подпространствами линейного оператора с матрицей A может быть не только собственное, но и корневое подпространство, соответствующее этому собственному вектору (если геометрическая кратность этого собственного значения окажется равной 1). Найдем собственные векторы, соответствующие этому собственному значению:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right).$$

Получим

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Найдем присоединенный вектор высоты 2. Исследовать совместность системы при произвольных значениях параметра в данном случае не нужно. Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{array} \right),$$

откуда присоединенный вектор высоты 2 равен

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Опишем все инвариантные множества этого аффинного преобразования. Во-первых, все неподвижные точки имеют координаты

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Инвариантными прямыми являются, во-первых, уже указанная прямая

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а также любая другая прямая, которая проходит через неподвижную точку в направлении собственного вектора матрицы A, то есть

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Инвариантные плоскости, во-первых, определяются параметрическими уравнениями

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а во-вторых, как плоскости, проходящие через неподвижные точки аффинного преобразования в направлении корневого подпространства линейного оператора, имеющего матрицу A, то есть

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Инвариантным не может быть аффинное подпространство, направляющее пространство которого образовано векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$, поскольку они соответствуют разным собственным числам.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти аффинное преобразование, которое переводит точки $A(1,3,4)$, $B(2,3,4)$, $C(1,4,4)$, $D(1,3,5)$ в точки $A'(3,4,3)$, $B'(8,9,9)$, $C'(-2,-2,-6)$, $D'(5,7,8)$ соответственно.

Ответ: $\begin{cases} x' = 5x - 5y + 2z + 5, \\ y' = 5x - 6y + 3z + 5, \\ z' = 6x - 9y + 5z + 4. \end{cases}$

Задача 2. Найти уравнение плоскости, в которую переходит плоскость

$$x + 2y + 3z = 5$$

при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 10z - 7, \\ y' = x + 4y + 2z + 1, \\ z' = 2x + 7y + 5z + 3. \end{cases}$$

Ответ: $-x - 11y + 7z = 29$.

Задача 3. Найти аффинное преобразование пространства, при котором каждая точка евклидова пространства переходит в точку, симметричную относительно плоскости

$$x + 2y + z = 2.$$

Ответ: $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}, \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}. \end{cases}$

Задача 4. Найти формулы аффинного преобразования (F, φ) евклидова аффинного пространства $\mathbb{R}^3$, которое действует как композиция симметрии относительно плоскости

$$\alpha\colon x + 2y + z = 2$$

и поворотом с центром в начале координат на угол 90° в положительном направлении вокруг вектора $\boldsymbol{k}$.

Ответ: $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}, \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}. \end{cases}$

Задача 5. Найти преобразование подобия, являющееся композицией поворота на угол $\pi/2$ вокруг точки $(1,1)$ и преобразования гомотетии с центром в этой точке и коэффициентом 3.

Ответ: $\begin{cases} x'' = -3y + 4, \\ y'' = 3x - 2. \end{cases}$

Задача 6. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 4, \\ y' = 3x - 2y. \end{cases}$$

Ответ: $A(1,1)$ — инвариантная точка преобразования, $3x + y = 4$ и $x - 2y = -1$ — инвариантные прямые.

Задача 7. Найти инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{cases} x' = x + y - 1, \\ y' = -2y + 1. \end{cases}$$

Ответ: $y = \frac{1}{3}$ — единственная инвариантная прямая.