Семинар 28. Классификация движений на плоскости и в пространстве

§1. Движение плоскости

Аффинное преобразование (F, φ) евклидова аффинного пространства $(\mathbb{A}, V)$ называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояния между точками: для всех $P, Q \in \mathbb{A}$

$$\rho(F(P), F(Q)) = \rho(P, Q).$$

Можно доказать, что аффинное преобразование (F, φ) тогда и только тогда является движением, когда его линейная часть $\varphi\colon V \to V$ будет ортогональным линейным оператором на евклидовом векторном пространстве V.

Основными примерами движений евклидовой плоскости являются следующие.

1. *Сдвиг* или *параллельный перенос* всех точек плоскости на один и тот же вектор.

2. *Поворот* плоскости на определённый угол вокруг некоторой точки.

3. *Симметрия* плоскости относительно некоторой прямой.

4. *Скользящая симметрия*, т. е. композиция симметрии относительно прямой и сдвига на вектор, параллельный данной прямой. Порядок применения сдвига и симметрии в этом случае не важен.

Оказывается, что этими примерами все движения плоскости исчерпываются. Можно показать, что любое движение евклидовой плоскости является либо сдвигом, либо поворотом, либо симметрией, либо скользящей симметрией.

Заметим, что сдвиг и поворот сохраняют, а симметрия и скользящая симметрия меняют ориентацию плоскости. Поэтому сдвиг и поворот называют *собственными*, а симметрию и скользящую симметрию *несобственными* движениями плоскости. Тождественное преобразование можно считать сдвигом на нулевой вектор или поворотом на нулевой угол.

Для определения типа движения плоскости достаточно сделать следующее:

1) Вычислить определитель матрицы линейного преобразования. Если он равен 1, то движение плоскости является собственным (сдвигом или поворотом), если $\det A = -1$ — несобственным (симметрией или скользящей симметрией).

2) Если $\det A = 1$ и матрица единична, то движение плоскости является сдвигом. Вектор свободных коэффициентов равен вектору сдвига. Если же при этом матрица линейной части не единична, то движение плоскости является поворотом, а неподвижная точка преобразования задает центр поворота.

3) Если $\det A = -1$ и преобразование имеет неподвижные точки, то движение плоскости является симметрией, в противном случае — скользящей симметрией. Более того, в случае, если движение является симметрией, аффинное преобразование имеет не единственную неподвижную точку. Все точки некоторой прямой являются неподвижными.

Во всех задачах предполагается, что система координат является прямоугольной.

Задача 1. Выяснить геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = y - 2, \\ y' = 4 - x. \end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен 1. Таким образом, это движение является поворотом. Чтобы выяснить угол поворота, вспомним общий вид матрицы поворота на плоскости

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

откуда $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Теперь найдем центр поворота. Эта точка будет единственной неподвижной точкой аффинного преобразования. Поэтому для определения центра поворота нужно решить систему линейных уравнений

$$\begin{array}{rcl} x & = & y-2, \\ y & = & 4-x. \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{rcl} x-y & = & -2, \\ x+y & = & 4, \end{array}$$

откуда центр поворота есть точка $P(1,3)$.

Задача 2. Выяснить геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1, \\ y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1. \end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен 1. Таким образом, это движение является поворотом. Угол поворота равен $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найдем центр поворота — неподвижную точку аффинного преобразования. Для этого решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1, \\ y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1, \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 2 - \sqrt{2},\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 - \sqrt{2},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, данное движение является поворотом на $\frac{\pi}{4}$ вокруг точки $P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 3. Выяснить геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + 1, \\ y' = \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix},$$

а ее определитель равен -1. Таким образом, это движение является симметрией или скользящей симметрией. Найдем неподвижные точки преобразования, решив систему уравнений

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=-1,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=\sqrt{3}.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на -2, а второе — на $\frac{2}{\sqrt{3}}$, получим

$$\begin{cases}x-\sqrt{3}y=2,\\ x-\sqrt{3}y=2.\end{cases}$$

Таким образом, все точки уравнения $x-\sqrt{3}y=2$ являются неподвижными. Значит, данное движение задает симметрию относительно прямой $x-\sqrt{3}y=2$.

Задача 4. Выяснить геометрический смысл движения евклидовой плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases}x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+3,\\ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+1.\end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix},$$

а ее определитель равен -1. Таким образом, это движение является симметрией или скользящей симметрией.

Посмотрим, имеет ли данное движение неподвижную точку. Для этого нужно проверить, совместна ли система

$$\begin{cases}-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+3=x,\\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+1=y.\end{cases}$$

В матричном виде эту систему можно переписать следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-8/5 & 4/5 & -3\\ 4/5 & -2/5 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}+2\cdot\mathrm{II}\\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & -5\\ 4/5 & -2/5 & -1\end{array}\right).$$

Ясно, что система несовместна, а значит данное движение неподвижных точек не имеет. Следовательно, можно утверждать, что данное движение является скользящей симметрией.

Найдём прямую (“зеркало”), относительно которой делается симметрия, и вектор сдвига.

Действие скользящей симметрии наглядно представлено на рис. 1.

Синим выделено зеркало, а красным — вектор сдвига $\boldsymbol{u}$. Ясно, что если взять произвольную точку P на плоскости, то середина Q отрезка PP' будет лежать на зеркале. Если применить скользящую симметрию F к точке Q, то она сдвинется в точности на вектор $\boldsymbol{u}$. Для нашего преобразования возьмём в качестве точки P начало координат O. Тогда $F(O)=O'=(3,1)$. Середина отрезка OO' — точка $Q(3/2,1/2)$. $F(Q)=(5/2,5/2)$,

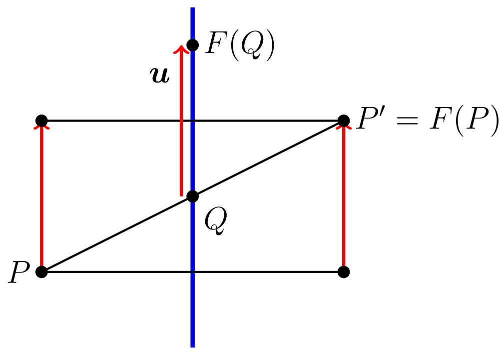

Рис. 1: Скользящая симметрия

значит, вектор сдвига $\boldsymbol{u} = \overline{QF(Q)} = (1, 2)$. Начальная точка Q и направляющий вектор $\boldsymbol{u}$ определяют прямую-зеркало

$$\frac{x - 3/2}{1} = \frac{y - 1/2}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x - y = 5/2.$$

Итак, наша скользящая симметрия представляет собой композицию симметрии относительно прямой $2x - y = 5/2$ и сдвига на вектор $(1, 2)$.

§2. Движение пространства

Движения пространства тоже делятся на собственные и несобственные. К собственным движениям, то есть тем, которые сохраняют ориентацию базиса, относят:
– Вращение вокруг оси,
– Параллельный перенос вдоль некоторого вектора,
– Композицию вращения вокруг оси и параллельного переноса в направлении этой оси ("винтовое движение").

Можно вращение вокруг оси и параллельный перенос вдоль некоторого вектора считать частным случаем винтового движения, но мы так делать не будем.

К несобственным движениям пространства относят:
– Симметрию относительно плоскости,
– Композицию симметрии относительно плоскости на вращение вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости,
– Композицию симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости (трехмерный аналог скользящей симметрии).

Здесь также, как и в предыдущем параграфе, будем определять тип движения с помощью нахождения неподвижных точек и инвариантных прямых или плоскостей аффинного преобразования. Начнем с собственных движений.

При вращении вокруг оси все точки этой оси остаются неподвижными. Направление оси совпадает с направлением собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 1$. Для определения угла поворота можно вспомнить канонический вид ортогонального оператора третьего порядка в том случае, если одно из собственных значений равно 1:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей поворота относительно оси $\boldsymbol{e}_1$ на угол φ.

Определить тип параллельного переноса очень просто: матрица линейной части аффинного преобразования единична, неподвижных точек преобразование не имеет. Свободные члены в записи движения образуют вектор сдвига.

При винтовом движении нет неподвижных точек, однако есть инвариантная прямая, по направлению совпадающая с направлением собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 1$. Определение канонического вида ортогонального оператора позволит найти и угол поворота.

Теперь поговорим о несобственных движениях.

Симметрия относительно плоскости оставляет неподвижными все точки некоторой плоскости, причем эта плоскость не просто является инвариантной плоскостью, а полностью состоит из неподвижных точек. В частности, это означает, что число $\lambda_1 = 1$ является собственным значением кратности 2. Кроме того, в силу того, что это движение несобственное, третьим собственным значением будет $\lambda_2 = -1$.

При композиции симметрии относительно плоскости на вращение вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, есть только одна неподвижная точка: точка пересечения оси вращения и плоскости. Тем не менее, вся плоскость является инвариантной плоскостью, а угол поворота можно определить с помощью канонического вида ортогонального оператора. В данном случае он имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

При композиции симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости, неподвижных точек нет. Найти конкретный вектор переноса и плоскость симметрии ("зеркало") можно найти из соображений, аналогичных тем, которые используются для описания скользящей симметрии на плоскости.

Задача 5. Выяснить геометрический смысл движения пространства, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, \\ z' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1. \end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен 1. Таким образом, это движение является собственным. Найдем неподвижные точки, для этого надо решить систему:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, \\ z = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 3, \\ -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, все точки прямой

$$L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются неподвижными. Значит, это движение является поворотом вокруг прямой L на некоторый угол.

Чтобы найти угол поворота, найдем собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Канонический вид ортогонального оператора, заданного матрицей A, имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Итак, указанное движение является поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг прямой L.

Задача 6. Выяснить геометрический смысл движения пространства, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z + 1, \\ y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 1, \\ z' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 2. \end{cases}$$

Решение: Матрица линейной части преобразования равна

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен -1. Таким образом, это движение является несобственным.

Неподвижные точки системы определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 13x + y - 8z = 9, \\ 7x + 13y + 4z = 9, \\ 4x - 8y + 10z = -18. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 1 & -8 \\ 7 & 13 & 4 \\ 4 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 2916, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -8 \\ 9 & 13 & 4 \\ -18 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 13 & 9 & -8 \\ 7 & 9 & 4 \\ 4 & -18 & 10 \end{vmatrix} = 2916, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 9 \\ 7 & 13 & 9 \\ 4 & -8 & -18 \end{vmatrix} = -2916,$$

откуда

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = -1.$$

Таким образом, точка $M(1, 0, -1)$ является единственной неподвижной точкой преобразования. Таким свойством обладает только один тип несобственного движения: композиция поворота вокруг оси, проходящей через точку M и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси.

Поскольку все точки, лежащие на оси поворота, остаются на ней, хотя и не являются неподвижными, то направление оси поворота совпадает с направлением собственного вектора, соответствующего действительнозначному собственному значению. Число

$$\lambda_1 = -1$$

является собственным числом матрицы A. Найдем собственный вектор, соответствующий этому собственному значению:

$$A + E = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что вектор

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

задает направление поворота.

Найдем угол поворота. Для этого надо найти остальные собственные числа матрицы A. Они равны

$$\lambda_{2,3} = \pm i,$$

откуда следует, что угол поворота равен $\frac{\pi}{2}$, поскольку матрица

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая является матрицей ограничения на инвариантное подпространство, порожденное действительной и комплексной частью собственного вектора, соответствующего собственным числам $\pm i$, есть матрица поворота на угол $\frac{\pi}{2}$.

Кроме того, найдем отражающую плоскость. Эта плоскость проходит через точку M с нормальным вектором $\boldsymbol{u}$ и задается общим уравнением

$$2x + 2y - z = 3.$$

Итак, указанное движение является композицией поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2t, \\ z = -1 - t \end{cases}$$

и симметричного отражения относительно плоскости

$$2x + 2y - z = 3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Выяснить геометрический смысл движения плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{\sqrt{2}} - 1, \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

в некоторой прямоугольной системе координат.

Ответ: Поворот на 45° относительно точки $(-1, 2)$.

Задача 2. Выяснить геометрический смысл движения плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{16}{13}, \\ y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \end{cases}$$

в некоторой прямоугольной системе координат.

Ответ: Симметрия относительно прямой $2x - 3y = 4$.

Задача 3. Выяснить геометрический смысл движения плоскости, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x \end{cases}$$

в некоторой прямоугольной системе координат.

Ответ: Скользящая симметрия, композиция симметрии относительно прямой $x - y = \frac{1}{2}$ и сдвига вектора $\boldsymbol{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Задача 4. Выяснить геометрический смысл движения пространства, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2, \\ z' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1. \end{cases}$$

Ответ: симметрия относительно плоскости $x - 2y + z = 2$.

Задача 5. Выяснить геометрический смысл движения пространства, которое задано формулами

$$\begin{cases} x' = -y + 3, \\ y' = -x + 1, \\ z' = z + 2. \end{cases}$$

Ответ: Скользящая симметрия, композиция симметрии относительно плоскости $x + y = 2$ и сдвига вектора $\boldsymbol{u} = (1, -1, 2)^T$.