Семинар 29-30. Операции с тензорами

§1. Тензоры как полилинейные функции

Пусть $V_1, \dots, V_m$ — векторные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$. Отображение $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \to \mathbb{F}$ называется *полилинейной функцией*, если φ линейно по каждому аргументу. Полилинейная функция однозначно определяется своими значениями на базисных векторах.

Пусть пространства V_i равны V или V^*. *Тензором* типа (p, q) на векторном пространстве V называется полилинейная функция

$$\varphi\colon V \times V \times \dots V \times V^* \times V^* \dots \times V^* \to \mathbb{F},$$

где запись векторного пространства V встречается p раз, а V^* — q раз. Тензор типа (p, q) называют также p раз ковариантным и q раз контравариантным, а число $p+q$ называется *валентностью* тензора.

Координатами тензора φ называются элементы поля $\mathbb{F}$

$$a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*),$$

где $\boldsymbol{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в V, $\boldsymbol{e}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ — базис в V^*.

Примеры. Тензоры $(0, 0)$ — это константы, то есть элементы поля $\mathbb{F}$. Тензоры типа $(1, 0)$ — линейные функции, $(0, 1)$ — векторы из векторного пространства V, $(1, 1)$ — линейные операторы над векторным пространством V, $(2, 0)$ — билинейные функции. Таким образом, с помощью тензоров можно описать все объекты, которые мы изучали в этом курсе весь семестр.

Для записи тензора валентности 2 будем использовать матрицы, а для записи тензора валентности 3 — блочные матрицы из n блоков, где n — размерность V. Например, пусть дан тензор типа $(2, 1)$ a_{jk}^i. Будем считать, что

- i — номер строки,
- j — номер столбца,
- k — номер блока.

Для записи тензоров валентности 4 будем использовать блочные матрицы из n^2 блоков, в каждом из которых также содержится матрица размером $n \times n$.

Задача 1. Вычислить компоненты тензора, заданного законом

$$a_{kl}^{ij} = 2i + j + k - 2l$$

над векторным пространством $\mathbb{R}^2$.

Решение: Поскольку векторное пространство имеет размерность 2, каждый из индексов i, j, k, l пробегает значения от 1 до 2. Например, компонента тензора a_{21}^{12} — это a_{kl}^{ij} при $i = 1$, $j = 2$, $k = 2$, $l = 1$, а значит,

$$a_{21}^{12} = 2 \cdot 1 + 2 + 2 - 2 \cdot 1 = 4.$$

Вычислим компоненты тензора:

$$a_{11}^{11} = 2, \quad a_{11}^{12} = 3, \quad a_{11}^{21} = 4, \quad a_{11}^{22} = 5,$$

$$a_{12}^{11} = 0, \quad a_{12}^{12} = 1, \quad a_{12}^{21} = 2, \quad a_{12}^{22} = 3,$$
$$a_{21}^{11} = 3, \quad a_{21}^{12} = 4, \quad a_{21}^{21} = 5, \quad a_{21}^{22} = 6,$$
$$a_{22}^{11} = 1, \quad a_{22}^{12} = 2, \quad a_{22}^{21} = 3, \quad a_{22}^{22} = 4.$$

Таким образом, получим тензор

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Для записи законов тензорной алгебры будем использовать соглашение Эйнштейна. А именно, если в какой-то формуле подразумевается суммирование по индексу i, причем индекс i встречается один раз в записи верхних индексов и один раз в записи нижних индексов, то знак суммирования принято опускать. Например, закон пересчета координат тензора при замене базиса записывается следующим образом:

$$\tilde{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = v_{s_1}^{j_1} \ldots v_{s_q}^{j_q}\, a_{r_1 \ldots r_p}^{s_1 \ldots s_q}\, u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_p}^{r_p},$$

где u_j^i — компоненты матрицы перехода (из базиса $\boldsymbol{e}$ в базис $\boldsymbol{f}$), v_j^i — компоненты обратной матрицы перехода (из базиса $\boldsymbol{f}$ в базис $\boldsymbol{e}$), $a_{r_1 \ldots r_p}^{s_1 \ldots s_q}$ — компоненты тензора в базисе $\boldsymbol{e}$, $\tilde{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ — компоненты тензора в базисе $\boldsymbol{f}$. В записи этого закона используется суммирование по индексам $s_1, \ldots, s_q$, $r_1, \ldots, r_p$, но знаки суммирования опущены для упрощения.

Задача 2. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ тензор типа $(1, 2)$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{cr|cc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу этого тензора в базисе $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$.

Решение: Матрица перехода U к новому базису и обратная к ней V равны:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем блоки тензора в матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Закон преобразования тензора типа $(1, 2)$ записывается следующим образом:

$$\tilde{a}_k^{ij} = v_s^i v_l^j a_m^{sl} u_k^m.$$

В этом законе k — номер блока. Запишем отдельно законы преобразования блоков:

$$\tilde{a}_1^{ij} = v_s^i v_l^j a_m^{sl} u_1^m = v_s^i v_l^j a_1^{sl} u_1^1 + v_s^i v_l^j a_2^{sl} u_1^2.$$

$$\tilde{a}_2^{ij} = v_s^i v_l^j a_m^{sl} u_2^m = v_s^i v_l^j a_1^{sl} u_2^1 + v_s^i v_l^j a_2^{sl} u_2^2.$$

Элементы матрицы U нам известны:

$$u_1^1 = 0, \quad u_1^2 = 1, \quad u_2^1 = 1, \quad u_2^2 = -1,$$

а потому их можно подставить в формулы выше:

$$\tilde{a}_1^{ij} = v_s^i v_l^j a_1^{sl} u_1^1 + v_s^i v_l^j a_2^{sl} u_1^2 = v_s^i v_l^j a_2^{sl}.$$

$$\tilde{a}_2^{ij} = v_s^i v_l^j a_1^{sl} u_2^1 + v_s^i v_l^j a_2^{sl} u_2^2 = v_s^i v_l^j a_1^{sl} - v_s^i v_l^j a_2^{sl}.$$

Произведение матриц определяется тензорным законом:

$$\boxed{a_j^i b_k^j = c_k^i},$$

а транспонирование — правилом

$$(v)_i^j = (v^T)_j^i.$$

Запишем компоненты тензора $\tilde{a}_k^{ij}$ в виде произведения матриц, используя тензорный закон произведения матриц и правила замены индексов при транспонировании:

$$\tilde{a}_1^{ij} = v_s^i v_l^j a_2^{sl} = (VA_2)^{il} v_l^j = (VA_2)^{il} (v^T)_j^l = (VA_2V^T)^{ij},$$

аналогично

$$\tilde{a}_2^{ij} = \big(V(A_1 - A_2)V^T\big)^{ij}.$$

Благодаря этим операциям, можно свести закон пересчета компонент тензора при замене базиса к обычным матричным операциям. Конечно, для тензоров других типов подобные законы придется выводить заново. Теперь вычислим матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$:

$$\tilde{A}_1 = VA_2V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = V(A_1 - A_2)V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & -6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Замечание 1. При непреодолимом отвращении к матричным операциям (или скорее, к тому, чтобы сводить операцию пересчета координат тензора в другом базисе к матричным операциям) задачу можно решить напрямую. А именно, достаточно записать закон преобразования тензора при замене базиса:

$$\tilde{a}_k^{ij} = v_s^i v_l^j a_m^{sl} u_k^m,$$

после чего отдельно записать формулы расчета каждой компоненты тензора, например, при $i = 1$, $j = 2$, $k = 1$:

$$\tilde{a}_1^{12} = v_s^1 v_l^2 a_m^{sl} u_1^m = v_1^1 v_1^2 a_1^{11} u_1^1 + v_1^1 v_1^2 a_2^{11} u_1^2 + v_1^1 v_2^2 a_1^{12} u_1^1 + v_1^1 v_2^2 a_2^{12} u_1^2 +$$

$$+ v_2^1 v_1^2 a_1^{21} u_1^1 + v_2^1 v_1^2 a_2^{21} u_1^2 + v_2^1 v_2^2 a_1^{22} u_1^1 + v_2^1 v_2^2 a_2^{22} u_1^2,$$

после чего подставить компоненты матриц U и V, а также координаты тензора a_k^{ij}. Однако в этом случае придется записать подобные формулы для всех восьми компонент тензора, каждая из которых содержит сумму восьми слагаемых.

Замечание 2. Хочется также заметить, что тензорный закон произведения матриц не зависит от того, является индекс j верхним или нижним. Главное, что он является вторым в первой матрице, если все индексы считать по порядку, начиная с верхних, и первым во второй матрице. Таким образом, в первой матрице он задает номера столбцов, а во второй — номера строк. Например, произведение матриц также можно определить тензорным законом:

$$\boxed{a^{ij}b^j_k = c^i_k.}$$

Это же относится и к транспонированию.

Задача 3. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ тензор типа $(0, 3)$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу этого тензора в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$.

Решение: Матрица перехода U к новому базису и обратная к ней V равны:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем блоки тензора в матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Закон преобразования тензора типа $(0, 3)$ записывается следующим образом:

$$\tilde{a}^{ijk} = v^i_s v^j_l v^k_m a^{slm}.$$

В этом законе k — номер блока. Запишем отдельно законы преобразования блоков:

$$\tilde{a}^{ij1} = v^i_s v^j_l v^1_m a^{slm} = v^i_s v^j_l v^1_1 a^{sl1} + v^i_s v^j_l v^1_2 a^{sl2} = -v^i_s v^j_l a^{sl1} - v^i_s v^j_l a^{sl2} =$$

$$= -(VA_1)^{il} v^j_l - (VA_2)^{il} v^j_l = -(VA_1)^{il}(v^T)^l_j - (VA_2)^{il}(v^T)^l_j = -\big(V(A_1 + A_2)V^T\big)^{ij}.$$

Аналогично

$$\tilde{a}^{ij2} = -\big(V(2A_1 + A_2)V^T\big)^{ij}.$$

Вычислим блоки тензора в новом базисе:

$$-V(A_1 + A_2)V^T = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$-V(2A_1 + A_2)V^T = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rr|rr} -2 & -5 & -5 & -10 \\ -1 & -5 & -4 & -11 \end{array}\right).$$

§2. Тензорные операции

Сумма и произведение.

Суммой двух тензоров одинакового типа называется тензор

$$(a + b)^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = a^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + b^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}.$$

Произведением тензора a типа (p_1, q_1) и b типа (p_2, q_2) называется тензор $a \otimes b$ типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ с компонентами

$$(a \otimes b)^{j_1 \dots j_{q_1} l_1 \dots l_{q_2}}_{i_1 \dots i_{p_1} k_1 \dots k_{p_2}} = a^{j_1 \dots j_{q_1}}_{i_1 \dots i_{p_1}} \cdot b^{l_1 \dots l_{q_2}}_{k_1 \dots k_{p_2}}.$$

Задача 4. Тензоры a и b типа $(1,1)$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ представлены матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы тензоров $a + b$ и $a \otimes b$ в том же базисе.

Решение: Очевидно, что

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В результате тензорного умножения a и b получим тензор типа $(2,2)$. Произведение тензоров определяется формулой:

$$c^{ij}_{kl} = a^i_k \cdot b^j_l.$$

Имеем

$$c^{ij}_{11} = a^i_1 \cdot b^j_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c^{ij}_{12} = a^i_1 \cdot b^j_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c^{ij}_{21} = a^i_2 \cdot b^j_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c^{ij}_{22} = a^i_2 \cdot b^j_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим тензор

$$a \otimes b = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right).$$

Задача 5. Тензоры a^k_{ij} и b^l в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{R}^2$ представлены матрицами:

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} 8 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора $a \otimes b$ в том же базисе.

Решение: Пусть $C = A \otimes B$, тогда

$$c^{kl}_{ij} = a^k_{ij} b^l.$$

Получим

$$c^{kl}_{11} = a^k_{11} b^l = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad c^{kl}_{12} = a^k_{12} b^l = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c^{kl}_{21} = a^k_{21} b^l = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad c^{kl}_{22} = a^k_{22} b^l = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим тензор

$$a^k_{ij} \otimes b^l = \left(\begin{array}{rr|rr} -8 & 8 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline -5 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right).$$

Свертка тензора по паре индексов.

Сверткой тензора a типа (p,q) по паре индексов j_s, i_r называется тензор b типа $(p-1, q-1)$ с компонентами

$$b^{j_1\ldots j_{s-1}j_{s+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{r-1}i_{r+1}\ldots i_p} = a^{j_1\ldots j_{s-1}kj_{s+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{r-1}ki_{r+1}\ldots i_p}.$$

В последней формуле предполагается суммирование по индексу k.

Задача 6. Тензор a^{jk}_i в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{R}^2$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Найти матрицы сверток $b^k = a^{ik}_i$, $c^j = a^{ji}_i$ в том же базисе.

Решение: Вычислим компоненты тензоров b^k и c^j:

$$b^1 = a^{i1}_i = a^{11}_1 + a^{21}_2 = -2 + 0 = -2, \quad b^2 = a^{i2}_i = a^{12}_1 + a^{22}_2 = 2 + 1 = 3.$$

Таким образом,

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$c^1 = a^{1i}_i = a^{11}_1 + a^{12}_2 = -2 + 3 = 1, \quad c^2 = a^{2i}_i = a^{21}_1 + a^{22}_2 = 1 + 1 = 2.$$

Таким образом,

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Тензоры a^i_j и b^k_l типа $(1,1)$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ представлены матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора $C = A \otimes B$ в том же базисе, после чего найти свертку c^{ik}_{kl}.

Решение: $c^{ik}_{jl} = a^i_j b^k_l$. Имеем

$$c^{ik}_{11} = a^i_1 \cdot b^k_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad c^{ik}_{12} = a^i_1 \cdot b^k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$c^{ik}_{21} = a^i_2 \cdot b^k_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad c^{ik}_{22} = a^i_2 \cdot b^k_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим тензор

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ \hline 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 12 \end{array}\right).$$

Теперь вычислим свертку

$$c^{ik}_{kl} = c^{i1}_{1l} + c^{i2}_{2l} = d^i_l.$$

Имеем

$$d^1_1 = c^{1k}_{k1} = c^{11}_{11} + c^{12}_{21} = 0 + 4 = 4.$$

$$d_2^1 = c_{k2}^{1k} = c_{12}^{11} + c_{22}^{12} = 1 + 6 = 7.$$
$$d_1^2 = c_{k1}^{2k} = c_{11}^{21} + c_{21}^{22} = 0 + 8 = 8.$$
$$d_2^2 = c_{k2}^{2k} = c_{12}^{21} + c_{22}^{22} = 3 + 12 = 15,$$

то есть

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Кстати, давайте вычислим матричное произведение матриц A и B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Этот пример приведен здесь для того, чтобы убедиться, что матричное произведение — это свертка тензорного произведения.

Задача 8. Тензоры a_j^i и b^k векторного пространства $\mathbb{R}^3$ представлены матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) матрицу тензора $C = A \otimes B$.

б) матрицы сверток $d^k = c_i^{ik}$, $e^k = c_i^{ki}$.

в) сумму $d + e$.

Решение: а) Тензорное произведение вычисляется по формуле

$$c_i^{jk} = a_i^j b^k.$$

Имеем

$$c_1^{jk} = a_1^j b^k = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_2^{jk} = a_2^j b^k = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_3^{jk} = a_3^j b^k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$C = A \otimes B = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & 4 & 0 & -3 & 6 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

б) Свертка d^k вычисляется по формуле $d^k = c_i^{ik}$. Имеем

$$d^1 = c_i^{i1} = c_1^{11} + c_2^{21} + c_3^{31} = -2 + 1 + 0 = -1,$$
$$d^2 = c_i^{i2} = c_1^{12} + c_2^{22} + c_3^{32} = 4 - 2 + 0 = 2,$$
$$d^3 = c_i^{i3} = c_1^{13} + c_2^{23} + c_3^{33} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом,

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $e^k = c_i^{ki}$, то есть

$$e^1 = c_i^{1i} = c_1^{11} + c_2^{12} + c_3^{13} = -2 + 6 + 0 = 4,$$

$$e^2 = c_i^{2i} = c_1^{21} + c_2^{22} + c_3^{23} = 0 - 2 + 0 = -2,$$
$$e^3 = c_i^{3i} = c_1^{31} + c_2^{32} + c_3^{33} = -1 + 4 + 0 = 3.$$

Таким образом,

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

в)

$$d + e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Симметрирование и альтернирование.

Симметрированием тензора $a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ типа (p,q) по паре нижних индексов i_r, i_s называется тензор $a_{i_1\ldots(i_r)\ldots(i_s)\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ типа (p,q) с компонентами

$$a_{i_1\ldots(i_r)\ldots(i_s)\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{2}\left(a_{i_1\ldots i_r\ldots i_s\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} + a_{i_1\ldots i_s\ldots i_r\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\right).$$

Аналогично определяется симметрирование по паре верхних индексов.

Кроме того, симметрирование можно определить не по двум, а по группе нижних/верхних индексов.

Например, симметрированием тензора a по группе нижних индексов $i_1, \ldots, i_r$ называется тензор $a_{(i_1\ldots i_r)i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ с компонентами

$$a_{(i_1\ldots i_r)i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} a_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(r)}i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q},$$

где S_r — группа перестановок из r элементов (то есть суммирование выполняется по всем перестановкам из r элементов).

Альтернированием тензора $a_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ типа (p,q) по паре нижних индексов i_r, i_s называется тензор $a_{i_1\ldots[i_r]\ldots[i_s]\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ типа (p,q) с компонентами

$$a_{i_1\ldots[i_r]\ldots[i_s]\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{2}\left(a_{i_1\ldots i_r\ldots i_s\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} - a_{i_1\ldots i_s\ldots i_r\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}\right).$$

Аналогично определяется альтернирование по паре верхних индексов, а также по группе нижних/верхних индексов.

Например, альтернированием тензора a по группе нижних индексов $i_1, \ldots, i_r$ называется тензор $a_{[i_1\ldots i_r]i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ с компонентами

$$a_{[i_1\ldots i_r]i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(r)}i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q},$$

где S_r — группа перестановок из r элементов, $\operatorname{sgn}\sigma$ — число, равное 1, если подстановка σ четная, и -1, если σ нечетная.

В упражнениях ограничимся симметрированием и альтернированием по паре индексов.

Задача 9. Тензор a_i^{jk} в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{R}^2$ задан матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выполнить симметрирование и альтернирование тензора по группе верхних индексов.

Решение: По формуле симметрирования и альтернирования получаем

$$a_i^{(jk)} = \frac{1}{2}(a_i^{jk} + a_i^{kj}), \quad a_i^{[jk]} = \frac{1}{2}(a_i^{jk} - a_i^{kj}).$$

Запишем блоки тензора в матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a_1^{(jk)} = \frac{1}{2}(a_1^{jk} + a_1^{kj}), \quad a_2^{(jk)} = \frac{1}{2}(a_2^{jk} + a_2^{kj}),$$

откуда

$$A_1^s = \frac{1}{2}(A_1 + A_1^T), \quad A_2^s = \frac{1}{2}(A_2 + A_2^T).$$

Аналогично

$$A_1^a = \frac{1}{2}(A_1 - A_1^T), \quad A_2^a = \frac{1}{2}(A_2 - A_2^T).$$

Получим

$$A_1^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_2^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A^s = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/2 & -1 & 3/2 \\ 5/2 & 4 & 3/2 & 1 \end{array}\right).$$

Аналогично

$$A_1^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A^a = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right).$$

Задача 10. Тензор a_i^{jk} в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{R}^3$ задан матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выполнить симметрирование и альтернирование по группе индексов, при этом

а) Тензор имеет тип $(1, 2)$, симметрирование и альтернирование выполняются по паре верхних индексов.

б) Тензор имеет тип $(2, 1)$, симметрирование и альтернирование выполняются по паре нижних индексов.

Решение: а) Запишем матрицы блоков:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Симметрирование выполняется по формуле

$$a_i^{(jk)} = \frac{1}{2}\left(a_i^{jk} + a_i^{kj}\right),$$

откуда (обоснование см. в предыдущей задаче)

$$A_1^s = \frac{1}{2}(A_1 + A_1^T), \quad A_2^s = \frac{1}{2}(A_2 + A_2^T), \quad A_3^s = \frac{1}{2}(A_3 + A_3^T).$$

Имеем

$$A_1^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A^s = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Аналогично выполняем альтернирование:

$$A_1^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A^a = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

б) Теперь выполним симметрирование и альтернирование по нижним индексам. Симметрирование выполняется по формуле:

$$a^i_{(jk)} = \frac{1}{2}\left(a^i_{jk} + a^i_{kj}\right).$$

Составим матрицы A_1, A_2, A_3, в которых записаны соответственно первые, вторые и третьи строки исходного тензора:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда симметрирование можно выполнить по простым матричным формулам

$$A_k^s = \frac{1}{2}\left(A_k + A_k^T\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Имеем

$$A_1^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3^s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A^s = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -4 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right).$$

Для записи тензора в виде блочной матрицы пришлось в первый блок собрать первые строки всех матриц, во второй — вторые строки и в третий — третьи строки.

Аналогично

$$a^i_{[jk]} = \frac{1}{2}\left(a^i_{jk} - a^i_{kj}\right) \quad \Rightarrow \quad A_k^a = \frac{1}{2}\left(A_k - A_k^T\right),\ k = 1, 2, 3.$$

$$A_1^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3^a = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A^a = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 3 & 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ тензор типа $(2,1)$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу этого тензора в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1\}$.

Ответ: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{rr|rr} 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$.

Задача 2. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ тензор типа $(3,0)$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Найти матрицу этого тензора в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$.

Ответ: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{rr|rr} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Задача 3. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^3$ тензор типа $(1,2)$ представлен матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу этого тензора в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\}$.

Ответ: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & 3 & -2 & 2 & -3 & 3 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & -6 & 4 & -1 & 4 & -4 & -3 & 7 & -5 \\ -3 & 5 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Задача 4. Тензоры a^i_j и b^k_l типа $(1,1)$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ представлены матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора $a \otimes b - b \otimes a$ в том же базисе.

Ответ: $a \otimes b - b \otimes a = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -2 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 11 \\ \hline 4 & -8 & 0 & 2 \\ 5 & -11 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Задача 5. Тензоры a^{ij}_{kl}, b^{sm} и c^n_r векторного пространства $\mathbb{R}^3$ представлены матрицами:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 5 & 2 & -5 & 7 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) матрицы сверток $d^i_l = a^{ij}_{jl}$, $e^j_k = a^{ij}_{ik}$, a^{ij}_{kj}, c^n_n.

б) тензорные произведения $d^i_l \otimes e^j_k$, $b^{sm} \otimes e^j_l$, $b^{sm} \otimes c^n_r$.

в) сумму $d^i_l + c^n_r$.

Ответ: а) $d^i_l = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 3 & 14 & 9 \\ 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$, $e^j_k = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 9 & 14 & 3 \end{pmatrix}$, $a^{ij}_{kj} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, $c^n_n = 6$,

б) $d^i_l \otimes e^j_k = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 30 & 30 & 45 & 35 & 5 & 70 & 10 & 20 & 15 \\ 18 & 18 & 27 & 21 & 3 & 42 & 6 & 12 & 9 \\ 54 & 54 & 81 & 63 & 9 & 126 & 18 & 36 & 27 \\ \hline 6 & 6 & 9 & 7 & 1 & 14 & 2 & 4 & 3 \\ 84 & 84 & 126 & 98 & 14 & 196 & 28 & 56 & 42 \\ 66 & 66 & 99 & 77 & 11 & 154 & 22 & 44 & 33 \\ \hline 84 & 84 & 126 & 98 & 14 & 196 & 28 & 56 & 42 \\ 54 & 54 & 81 & 63 & 9 & 126 & 18 & 36 & 27 \\ 60 & 60 & 90 & 70 & 10 & 140 & 20 & 40 & 30 \end{array}\right)$, $b^{sm} \otimes e^j_l = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 12 & 18 & 6 & 14 & 21 & 7 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & -7 & 7 & 0 & -2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 12 & 18 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 12 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 18 & 27 & 9 & 28 & 42 & 14 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & -9 & 9 & 0 & -14 & 14 & 0 & -3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 & 14 & 14 & 14 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$,

$b^{sm} \otimes c^n_r = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 8 & 12 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ \hline -2 & -3 & -1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$,

в) $d^i_l + c^n_r = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 17 \\ 4 & 18 & 11 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Тензор a^{ijk} в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{R}^2$ задан матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

Выполнить симметрирование и альтернирование тензора по индексам

а) i, j

б) i, k.

Ответ: а) $a^{(ij)k} = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$, $a^{[ij]k} = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$,

б) $a^{(i)j(k)} = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 2 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 3 & 6 \end{array}\right)$, $a^{[i]j[k]} = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$.