Интегралы и диф. уравнения (лекции)

Лекция 1. Неопределённый интеграл. Таблица неопределённых интегралов.

§1. Первообразная и её свойства

Опр Ф-я $F(x)$ наз. первообразной ф-и $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если
1) $F(x)$ диф-ма на $(a;b)$
2) $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$

Пример 1) $F(x) = x^3$, $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$
2) $F(x) = \arcsin x$, $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1;1)$.

Теор Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные ф-и $f(x)$ на $(a;b)$. Тогда $F(x) - G(x) = C$ (две первообразных отличаются на константу)

Д-во: Рассмотрим $\Phi(x) = F(x) - G(x)$
$\Phi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = C$ на этом пром-ке. ■

Опр Совокупность всех первообразных ф-и $f(x)$ наз. неопределённым интегралом этой функции.
обозн.: $\int f(x)dx$
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная интегрирования

Если $F(x)$ — некоторая первообразная ф-и $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$ (т.к. все первообразные отличаются на константу).

Опр Восстановление функции по её производной наз. интегрированием.

Замечание. Поскольку $\int$-е — операция, обратная диф-ю, для проверки правильности нужно взять производную.

§2. Свойства неопределённого интеграла

Рассмотрим некоторые св-ва неопр. $\int$-ла, непосредственно вытекающие из определения.

① $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Д-во: $(f(x)+C)' = f'(x)$. ■

② $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ или $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

Д-во: пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная ф-и $f(x)$. Тогда по определению

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$ ■

③ (Линейность опред. $\int$-ла)

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Д-во: пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная $g(x)$. Рассмотрим ф-ю $\alpha F(x) + \beta G(x)$:

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, т.е. $\alpha F(x) + \beta G(x)$ — первообразная ф-и $\alpha f(x) + \beta g(x)$.

Таким образом,

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$$

С другой стороны,

$$\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Таким образом, левая и правая части совпадают с точностью до константы, и описывают одинаковые мн-во знач-й. ■

Таким образом,

1) константу можно выносить за знак $\int$-ла,

2) неопр. $\int$-л от суммы равен сумме неопределённых интегралов

§3. Таблица неопр. интегралов

1. $\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$
13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$
18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Упражнения

1. $\int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx = x^3 + x^2 + \ln|x| + C$
2. $\int 2^x\left(1 + 3x^2 \cdot 2^{-x}\right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C$
3. $\int (2x + 3\cos x)\, dx = x^2 + 3\sin x + C$
4. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$
5. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$
7. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$
8. $\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 2}{\cos x} dx = x + 3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\operatorname{tg} x + C$
9. $\int \frac{x^2-9}{x^2-8} dx = x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right| + C$

Литература:

1) Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного (том VI из серии "Математика в техническом университете")
2) Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. "Дифференциальные уравнения" (том VIII из серии "Математика в техническом университете")
3) Пискунов Н.С. "Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов" (т. 1,2)
4) "Сборник задач по математике для ВТУЗов" (ч. 1,2), под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.
5) Филиппов А.Ф. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям"
6) "Задачи и упражнения по математическому анализу", под ред. Демидовича Б.П.
7) mathmod.bmstu.ru (конспект лекций Иванкова П.Л.

§4. Интегрирование подстановкой и заменой переменной

Теор (интегрирование подстановкой). Пусть ф-я $f(x)$ опр-на на пром-ке X и имеет на нём первообразную $F(x)$, т.е. $\int f(x)dx = F(x)+C$. Пусть ф-я $\varphi(t)$ опр-на и диф-ма на пром-ке T, причем $\varphi(T)\subset X$. Тогда $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ имеет первообразную на T, равную $F(\varphi(t))$, т.е.

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$$

□

Замечание. При практическом применении этой формулы часто используют формальный прием, кот. называется подведением под знак диф-ла:

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \{\varphi(t)=u\} = \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(t))+C$$

Теор. (об интегрировании заменой переменной). Пусть ф-я $\varphi(t)$ дифф-ма на T и взаимно однозначно отображает его на промежуток X, причем $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in T$. Пусть дифф-мая ф-я $f(x)$ опр-на на X. Тогда, если $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, то на X
$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$, где $\varphi^{-1}(x)$ — ф-я, обратная к $\varphi(t)$. □

Упражнения

① $\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$

② $\int \sqrt{3+x}\, dx = \frac{2}{3}(3+x)^{3/2} + C$

Из формулы интегрирования подстановкой следует, что

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) =$$

$= \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $F(x)$ — первообразная $f(x)$

Особенно часто это используется при $b=0$ или $a=1$:

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C; \quad \int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

---

③ $\int 3^{4x} dx = \frac{1}{4}\frac{3^{4x}}{\ln 3} + C$

④ $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$

⑤ $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2\cos\sqrt{x} + C$

⑥ $\int x \cdot 5^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{-x^2}}{\ln 5} + C$

⑦ $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}} dx = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}(e^{-ax}) + C$

⑧ $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}} = -\ln|\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4}| + C$

(9) $\int \frac{1}{x^2} a^{\frac{1}{x}} dx = -\frac{a^{1/x}}{\ln a} + C$

(10) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}} = \frac{1}{3} \ln\left|x^3 + \sqrt{x^6+1}\right| + C$

(11) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\arcsin 2x + C$

(12) $\int \frac{e^{\arcsin x} + x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = e^{\arcsin x} - \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

(13) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x + 3}} dx = -\ln\left|\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 3}\right| + C$

(14) $\int x\sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5 - \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 + C$

(15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C$

Можно д-ть формулу $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$