Лекция 2. Формула интегр-я по частям. Интегр-е выражений, содержащих квадратный трехчлен

§1. Формула ∫-я по частям.

Теор (формула интегрирования по частям).
Пусть ф-и $u(x)$, $v(x)$ дифф-мы на X, сущ-ет первообразная ф-и $u'(x)v(x)$. Тогда ∃ первообразная ф-и $u(x)v'(x)$, причем

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \quad x \in X$$

Д-во: Правило дифференцирования сложной функции:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Сущ-ют первообразные от левой ⇒ от правой части, причем

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

по св-ву ① неопр. ∫-ла получим:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Замечание. В кратком виде эта формула записывается так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Пример. $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x =$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

Случаи применения ф-лы ∫-я по частям:

① $\int x^n \ln x\,dx$, $\int x^n \arcsin x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$,

$\int x^n \arccos x\,dx$, где n — целое число ≥ 0.

В этих интегралах полагают $u = \ln x$, $\arcsin x, \ldots, \arccos x$, $dv = x^n dx$ (т.е. x^n подводим под знак дифф-ла)

② $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, где n - натур. число.

В этих интегралах полагают $u = x^n$, $dv = e^{ax}dx$, $\sin x\,dx$, $\cos x\,dx$ (т.е. под знак диф-ла подводим не степенную ф-ю).

③ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

Здесь в качестве $u(x)$ можно взять любую ф-ю.

Упражнения

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$
2. $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + C$
3. $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
4. $\int x^2\sin x\,dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$
5. $\int x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$
6. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$
7. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx = -\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + \ln x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) + C$
8. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ ⑨ $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ ⑩ $\int \ln(\sqrt{x}+1)\,dx$
11. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ab}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$
12. $\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + C$
13. $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| - \frac{x^2}{2} + C$
14. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{6}\ln(x^2+1) + C$

§2. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен

① Вычисление интегралов вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

а) если $m=0$, то выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене в знам-ле:
$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$
б) если $m\neq 0$, то выделяем в числителе производную от квадратного трехчлена в знаменателе:
$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx =$$
$$\frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
Второй интеграл сводится к случаю а

② Вычисление интегралов вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

производится аналогично, но сводится к другим табличным интегралам

③ Вычисление интегралов вида
$$\int\frac{dx}{(kx+l)\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{или} \quad \int\frac{(mx+n)\,dx}{(kx+l)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
сначала делаем замену
$\frac{1}{kx+l}=t$, это приводит интеграл к виду ②.

Упражнения

① $\int\frac{dx}{x^2+4x-5} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x-6}\right| + C$

② $\int\frac{x\,dx}{x^2-3x+3} = \frac{1}{2}\ln|x^2-3x+3| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-3/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C$

③ $\int\frac{4x-3}{x^2-2x+6}dx = 2\ln|x^2-2x+6| + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{5}} + C$

④ $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \arcsin\frac{x-4}{4} + C$

⑤ $\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \sqrt{x^2-6x+1} + C$

(6) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$

(7) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = -\arcsin\frac{2-x}{(x-1)\sqrt{2}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ (9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

(10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C$

(11) $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}} = -\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)} - \frac{2}{27}\ln\left|\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{x+2}\right| + C$

§3. Вычисление интегралов $\int R(u, \sqrt{l^2 \pm u^2})\,du$

(4) Интегралы вида $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ после выделения полного квадрата вычисляются по частям. Получим:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

(5) Интегралы вида $\int R(u, \sqrt{l^2 \pm u^2})\,du$, где R — рациональная функция своих аргументов, вычисляются с помощью тригонометрической подстановки:

$\int R(u, \sqrt{l^2-u^2})\,du \to u = l\sin t \quad (u = l\,\mathrm{th}\,t)$

$\int R(u, \sqrt{l^2+u^2})\,du \to u = l\,\mathrm{tg}\,t \quad (u = l\,\mathrm{sh}\,t)$

$\int R(u, \sqrt{u^2-l^2})\,du \to u = l\sec t \quad (u = l\,\mathrm{ch}\,t)$

Упражнения

1) $$\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + C$$

2) $$\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx = \frac{9}{2}\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right) + \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10} + C$$

3) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array}\right\} = 2\arcsin\frac{x}{2}\,\cancel{t} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$$