Лекция 3. Интегрирование рациональных дробей и тригонометрич. функций.

§1. Интегр-е рациональных дробей

Опр. Отношение двух многочленов $P(x)/Q(x)$ при $Q(x) \neq 0$, наз. рациональной дробью.
Опр. Если степень числителя рац. дроби меньше степени знам-ля, то такую дробь наз. правильной, а иначе — неправильной.
Если дробь яв. неправильной, то разделив числитель на знаменатель с остатком, получим многочлен + прав. дробь.

Опр. Рациональные дроби вида
$$\frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$
наз. простейшими. При этом $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ (одновременно)

Согласно основной теореме алгебры, всякий многочлен
$$Q(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$
может быть представлен в виде
$$Q(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$
где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $p_1, \ldots, p_s$, $q_1, \ldots, q_s$ — вещественные числа, многочлены $x^2+p_ix+q_i$ не имеют действ. корней. При этом
$$k_1 + \ldots + k_r + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n$$
Если многочлен $Q(x)$ не имеет веществ. корней, то в разложении отсутвуют линейные ~~мн~~ множители, если все корни веществены, то нет квадратных трёхчленов.

Теор. (о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших). Всякая правильная рациональная дробь, знаменатель которой представлен в виде
$$Q(x) = a_n (x-x_{\alpha_1})^{k_1} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

представляется в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{r1}}{x-\alpha_r} + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \ldots$$

$$+ \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$

причем такое разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Коэф-ты A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} находятся по методу неопр. коэффициентов: написать разложение в представленном виде с неопр. коэф-тами, найти эти коэф-ты, приравняв слагаемые при одинаковых степенях.

Упражнения

1) $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = \int \left(-\frac{1}{6x} - \frac{7}{2(x-2)} + \frac{17}{3(x-3)}\right) dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+x}\, dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{x^2+9x+9}{x^2(x^2+9)}\, dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{2x^2+4}{x^3+2x^2}\, dx$

5) $\displaystyle\int \frac{(x^2-x-4)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{5/2}{x+3}\right) dx$

6) $\displaystyle\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\, dx = \int \left(-\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}\right) dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8} = \int \left(\frac{1/12}{x+2} + \frac{-x+4}{12(x^2-2x+4)}\right) dx$

8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\, dx$

§2. Интегрирование с помощью рационализирующих подстановок

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}\right) dx,$$

где R — рациональная функция своих аргументов, вычисляется с помощью подстановок вида

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^s,$$ где s — общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_2}{n_2}$

Упражнения

① $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}\,(5+x)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right) + C$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$

③ $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} = 6\sqrt[6]{x} - 12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$

④ $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ ⑤ $\int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt{x+3}+4} dx$

§3. Интегрирование выражений $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

① Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное, то отделяем его, подводим $\sin x$ ($\cos x$) под знак диф-ла, используем основное триг. т-во для сведения к одной из функций и получаем интеграл от степенной функции

$$\int \sin^k x \cos^{2m+1} x \, dx = \int \sin^k x \cdot \cos^{2m} x \cos x \, dx =$$

$$= \int \sin^k x \cdot (1-\sin^2 x)^m \, d\sin x = \{\sin x = t\} =$$

$$= \int t^k \cdot (1-t^2)^m \, dt,$$

аналогично для $\int \cos^k x \cdot \sin^{2m+1} x \, dx$

② Если оба числа n и m чётные (и натуральные), то используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

③ Если $m+n=-2k$, то используем подстановку $t=tg\,x$

Упражнения

① $\int \sin^3 x\,dx$ ② $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$ ③ $\int \sin^4 x\,dx$

④ $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + C$

⑤ $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ ⑥ $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$ ⑦ $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

⑧ $\int \frac{1+ctg\,x}{1-ctg\,x}dx$

§4. Интегрирование тангенсов и котангенсов

① $\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

② $\int tg^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = tg\,x - x + C$

③ $\int tg^3 x\,dx = \int tg^2 x \cdot tg\,x\,dx = \int tg\,x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

④ $\int tg^4 x\,dx = \int (tg^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^2 dx =$

$= \int \frac{dx}{\cos^4 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx$

Для котангенсов — аналогично, напр.

⑤ $\int ctg^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)^2 dx = \int \frac{dx}{\sin^4 x} - 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int dx$

§5. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, берутся при помощи подстановки $tg\frac{x}{2}=t$, при этом

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\,arctg\, t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Упражнения

1. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\frac{1}{1+tg\frac{x}{2}} + C$
2. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = x + \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C$
3. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x} = arctg\left(tg\frac{x}{2}-1\right) + C$
4. $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$
5. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$

§6. Неберущиеся интегралы

Интегралы, кот. не выражаются в элем. ф-ях.
Известные примеры:

$\int e^{-x^2}dx$ $\quad\int \sin x^2 dx$ $\quad\int \cos x^2 dx$ $\quad\int \frac{\sin x}{x}dx$

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ $\quad\int \frac{dx}{\ln x}$ $\quad\int \frac{e^x}{x}dx$ $\quad\int \frac{e^x}{x^n}dx$

$\int \frac{\sin x}{x^n}dx$ $\quad\int \frac{\cos x}{x^n}dx$ $\quad(n\in\mathbb{N})$