Лекция 4. Определённый интеграл

§1. Понятие определённого интеграла

Опр. Мн-во точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, наз. разбиением отрезка $[a; b]$, отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, .., n$, наз. отрезками разбиения, длина i-того отрезка обозн. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, число $\lambda(\tau) = \max\limits_i \Delta x_i$ наз. диаметром разбиения τ.

Пусть ф-я $f(x)$ определена на отр. $[a; b]$. Рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку ξ_i, $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Опр Эта сумма наз. интегральной суммой ф-и $f(x)$, отвечающей разбиению τ и точкам ξ_i.

Опр. Предел интегральных сумм при $\lambda(\tau) \to 0$ и $n \to \infty$, наз. определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$, если он существует и не зависит от выбора разбиения.

Обозн.: $\int_a^b f(x)dx$, $\left.\begin{matrix} a \text{ – нижний} \\ b \text{ – верхний} \end{matrix}\right\}$ пределы $\int$-ла

Опр. Ф-я $f(x)$ наз. интегрируемой, если предел

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda(\tau) \to 0}} S(\sigma) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda(\tau) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

существует и конечен.

~~§2 Условия интегрируемости~~ Геометр. интерпретация определённого интеграла:

Пусть дана геометрическая фигура, огр. сверху графиком непрерывной функции, с боков отрезками вертикальных прямых $x = a$, $x = b$ и снизу отрезков $[a; b]$ оси

абсциссе. Такая фигура наз. криволинейной трапецией.
Вычислим площадь S такой криволинейной трапеции. Для этого возьмём разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на отрезке $[a; b]$ и выберем на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ точки ξ_i и η_i, в которых достигается соотв-но максимальное и минимальное значение ф-и $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
Пусть S_i — площадь криволинейной трапеции на i-том отрезке. Тогда

$$f(\eta_i)\Delta x_i \le S_i \le f(\xi_i)\Delta x_i$$

Просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i \le S \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если функция $f(x)$ интегрируема, то при стремлении к нулю диаметра разбиения получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \le S \le \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл от неотрицательной ~~не~~ интегрируемой функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

§2. Условия интегрируемости

Теор (о необходимом условии $\int$-ти функции). Если ф-я $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$. □

Опр Ф-я $f(x)$ наз. кусочно-непрерывной на отрезке $[a; b]$, если существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ такое, что $f(x)$ непр на каждом интервале (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{1,n}$, при этом существуют и конечны пределы (односторонние):

$$\lim_{x \to x_{i-1}+} f(x), \quad \lim_{x \to x_i -} f(x), \quad i = \overline{1,n}.$$

Замечание. Таким образом, ф-я $f(x)$ кусочно-непр на $[a; b]$, если она непр в каждой точке отрезка, за исключением конечного числа точек разрыва I рода.

Теор (об $\int$-сти кусочно-непр ф-ии) Кусочно-непр на $[a;b]$ функция $\int$-ма на этом отрезке $\square$

Замечание 1 Таким образом, непрерывная на $[a;b]$ функция также интегрируема на этом отрезке.

Замечание 2. Кусочная непрерывность не явл. необходимым условием $\int$-ти.

§3. Основные свойства определенного интеграла

① Линейность. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда ф-я $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

② Аддитивность. Пусть функция $f(x)$ интегр-ма на $[a;b]$ и $[b;c]$. Тогда она интегрируема на $[a;c]$, причем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

③ Монотонность (интегрирование неравенств). Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall x \in [a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Следствие. Интеграл от любой неотрицательной функции неотрицателен:

если $f(x) \ge 0$ при $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

④ Оценка по модулю. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$, причем

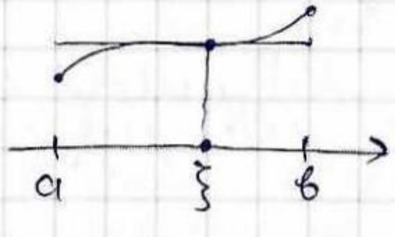
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Замечание. Это свойство справедливо лишь при $a \le b$. В общем случае справедливо лишь
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

⑤ Теорема о среднем. Пусть функция $f(x)$ непр. на $[a;b]$. Тогда $\exists\, \xi \in [a;b]$ такая, что
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$
При этом $f(\xi)$ наз. среднее значение функции на отрезке $[a;b]$.

⑥ Теорема об оценке. Пусть функция $f(x)$ непр. на $[a;b]$, и пусть $m \le f(x) \le M$. Тогда
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Геометрический смысл теоремы о среднем.



Площадь криволинейной трапеции под графиком ф-и $f(x)$ равна площади прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и $(b-a)$.

⑦ Обобщенная теорема о среднем. Пусть ф-я $f(x)$ непр. $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$, причем $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [a;b]$. Тогда $\exists\, \xi \in [a;b]$:
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

⑧ Обобщенная теорема об оценке. Пусть $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $g(x) \ge 0$, $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$. Тогда
$$m \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx$$

⑨ Неравенство Коши-Буняковского. Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы с квадратом на $[a;b]$. Тогда
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(10) Интегрирование чётных и нечётных функций на симметричном промежутке.

Опр. Промежуток вида $[-a; a]$ при нек. $a>0$ назовем симметричным.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[-a;a]$.

Если $f(x)$ чётная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Если $f(x)$ нечётная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

(11) Дополнительные свойства.

$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$

Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $f(x)$ интегрируема на $\forall$ отрезке $[c;d] \subset [a;b]$.

Упражнения

1. Оценить знак $\int$-ла $\int_{1/3}^{1} x \ln x\,dx$ (<0)
2. Сравнить, не вычисляя,
   (а) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ $<$
   (б) $\int_{0}^{1} e^{-x}\cos^2 x\,dx$ и $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\sin^2 x\,dx$ $<$
3. Оценить $\int$-л по теореме об оценке
   $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$

§4. Формула Ньютона-Лейбница.

Основная формула интегрального исчисления, связывает понятия определённого и неопределённого интеграла.

Теор (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная ф-и $f(x)$. Тогда
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

Упражнение

Вычислить определённые интегралы:

(1) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 = 5$

(2) $\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

(3) $\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

(4) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \operatorname{arctg}(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{4}.$

Найти среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

а) $f(x) = x^3$ на $[0;1]$ $\Rightarrow \frac{1}{4}.$

б) $f(x) = \cos^3 x$ на $[0; \frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow \frac{4}{3\pi}.$

§5. Теорема о замене переменной в опр. $\int$-ле и формула $\int$-е по частям.

Теор. (о замене переменной в опр. интеграле). Пусть ф-я $f(x)$ непр. на отрезке $[a;b]$, а функция $\varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha;\beta]$, причём значения функции $\varphi(t)$ при $t \in (\alpha;\beta)$ не выходят за пределы отрезка $[a;b]$. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \square$$

Теор (об $\int$-и по частям в определённом интеграле). Пусть ф-и ~~f(x)~~ $u(x)$ и $v(x)$ непр. и диф-мы на $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx. \ \square$$

Упражнения

(1) $$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left(2t - 2\ln|t+1|\right)\Big|_0^3 = 6 - 2\ln 4.$$

(2) $$\int_{-2}^0 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt \\ x = -2 \Rightarrow t = ? \end{array} \right\}$$

Интеграл не может быть вычислен указанной заменой.

(3) $$\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t\, dt \\ 0 \to 0,\ 3 \to \pi/2 \\ x^2 = 9\sin^2 t,\ 9 - x^2 = 9\cos^2 t \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{81}{8}\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\overset{0}{\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}} \right) = \frac{81\pi}{16}.$$

(4) $$\int_0^1 x e^x\, dx = 1$$

(5) $$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$