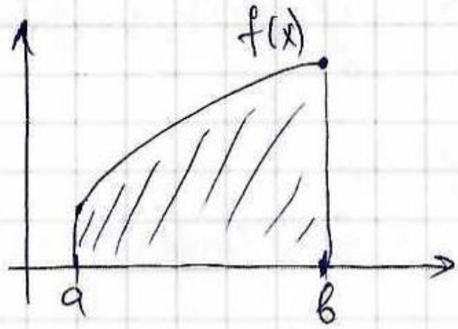
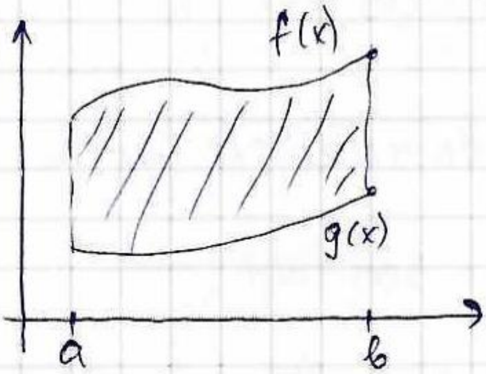
Лекция 5. Приложения определённого интеграла.

§1. Вычисление площадей плоских фигур

①


Площадь криволин. трапеции, ограниченной $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, осью Ox:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

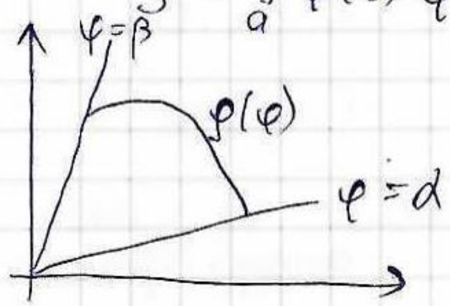
②


Площадь криволин. трапеции, ограниченной $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

③ Если плоская кривая задана парам-ки, уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то площадь такой кривой:

$$S = \int_a^b \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

④


Площадь криволин. сектора, заданного в полярных координатах формулой $r = r(\varphi)$, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$:

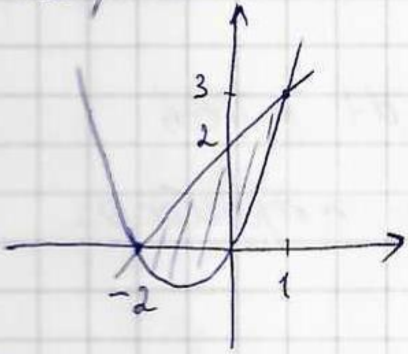
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Упражнения

① Найти площадь, ограниченную $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

$$S = \int_e^{e^2} \ln x\,dx = e^2$$

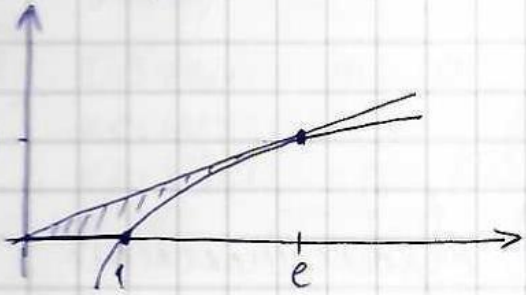
2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$



Точки пересечения:
$x = -2, \quad x = 1$

$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 - 2x)\, dx = \frac{9}{2}$$

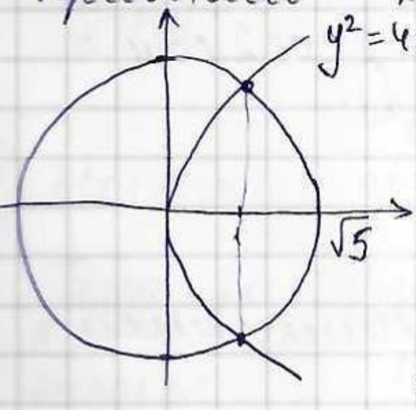
3) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в т. $x = e$ и осью Ox



Уравнение касательной:
$$y = \frac{x}{e}$$

$$S = \int_{0}^{e} \frac{x}{e}\, dx - \int_{1}^{e} \ln x\, dx = \frac{e}{2} - 1$$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$

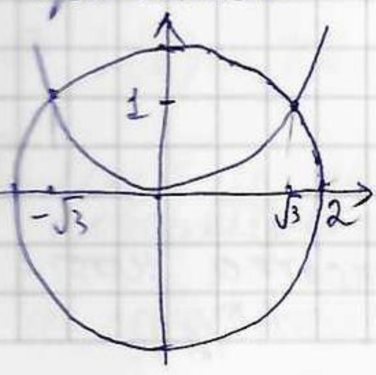


$$S = 2\int_{0}^{1} \sqrt{4x}\, dx + 2\int_{1}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{5\pi}{2} - 5\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\left\{ \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \right\}$$

5) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 = 3y$



$$S = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\, dx - 2\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3}\, dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

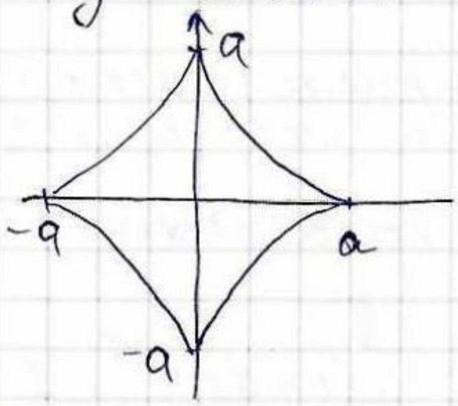
(6) Найти площадь фигуры, огр. эллипсом

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$S = 4\int_0^{\pi/2} y\,dx = 4\int_0^{\pi/2} b\sin t \cdot |-a\sin t|\,dt = \pi ab$$

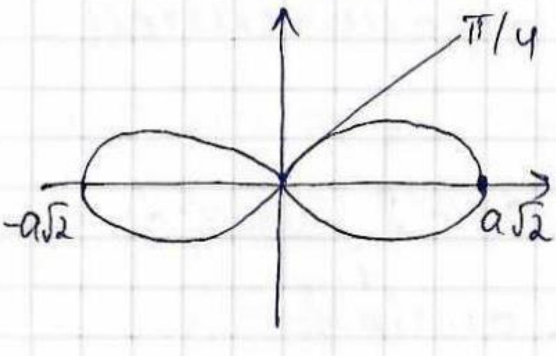
(7) Найти площадь фигуры, огр. астроидой:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$



$$S = 4\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t \cdot \left(3a\cos^2 t \cdot |-\sin t|\right)dt = 12a^2\int_0^{\pi/4} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = \frac{3\pi}{8}a^2$$

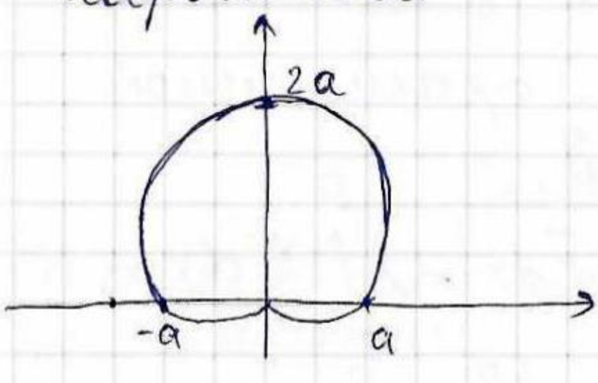
(8) Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли:



$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cdot 2\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2$$

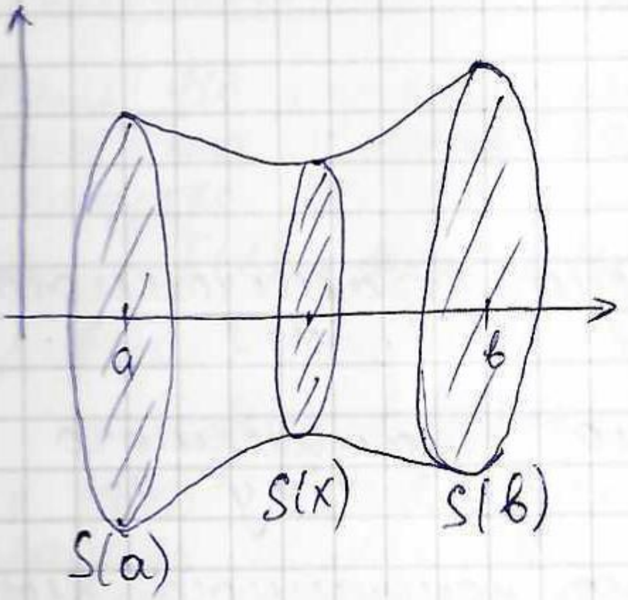
(9) Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\sin\varphi)$



$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\sin\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3\pi a^2}{2}$$

(10) Найти площадь одного лепестка четырехлепестковой розы $r = \cos 2\varphi$ $(\pi/8)$

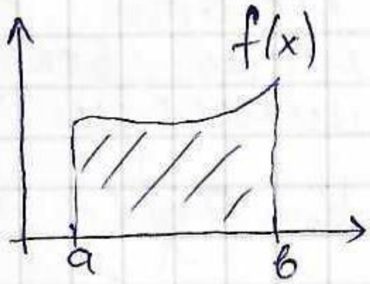
§2. Вычисление объёмов тел

1) 

Объём тела, ограниченного плоскостями $x=a$, $x=b$, площадь поперечного сечения которого в зависимости от координаты x, равна $S(x)$:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

2) Объём тела вращения, полученного вращением кривой $y=f(x)$, ограниченной от $x=a$, $x=b$:



- вокруг оси Ox: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$
- вокруг оси Oy: $V_y = 2\pi \int_a^b x\,|f(x)|\,dx$

Упражнения

1) Найти объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Тело расположено между плоскостями $x=\pm a$. При $x\in(-a;a)$ в сечении получаем эллипс:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right); \quad V=\frac{4}{3}\pi abc$$

2) Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=5y^2-4$, $x^2+z^2=(y-2)^2$ и содержащего точку $M(0;1;0)$.

$$V_1 = \int_{\sqrt{4/5}}^{1} \pi (5y^2-4)\,dy = \left(\frac{16}{3\sqrt{5}} - \frac{7}{3}\right)\pi$$

$$V_2 = \int_1^2 \pi (y-2)^2\,dy = \frac{\pi}{3}$$

$$V = V_1 + V_2 = \left(\frac{18}{3\sqrt{5}} - 2\right)\pi$$

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y^2+z^2=x^2-1$, $x=2$

4) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z^2+3$, $x^2+y^2=4z^2$

5) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$.

$$V_1 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2}-x\right)^2 dx \ \text{(прямая)} = \frac{91}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx \ \text{(парабола)} = \frac{61}{5}\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{272}{15}\pi$$

6) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$, $y=2$.

$$V = V_1 - V_2 = \underbrace{\pi\cdot 16\cdot 2}_{\text{цилиндр}} - 2\pi \int_{-4}^{0} x\left(\frac{x^2}{2}+2x+2\right)dx =$$

$$= 32\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi.$$