Лекция 6. Несобственные интегралы

§1 Несобственные интегралы I рода

Пусть $f(x)$ опр-на на $[a;+\infty)$ и интегрируема на $\forall$ отрезке $[a;b] \subset [a;+\infty)$. Тогда на промежутке $[a;+\infty)$ определена ф-я

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Опр Если существует предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

то этот предел наз. несобственным интегралом I рода ф-и $f(x)$ по бесконечному пром-ку $[a;+\infty)$ и обозн. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Опр Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

то интеграл наз. сходящимся, иначе — расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции:

Пусть $f(x)$ опр-на на $(-\infty; b]$ и интегрируема на $\forall$ отрезке $[a;b] \subset (-\infty; b]$.

Опр Предел

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

наз. несобственным интегралом I рода ф-и $f(x)$ по пром-ку $(-\infty; b]$

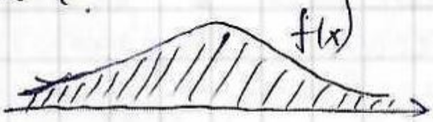
Геом-ки этот несобств. интеграл I рода представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции:

Если ф-я $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и интегрируема на $\forall$ отр. $[a;b]$, то можно выбрать произвольную точку c и рассмотреть сумму:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx,$$

<u>Опр</u> Эта сумма наз. <u>несобственным интегралом I рода</u> ф-и $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty;+\infty)$.

Сходимость этого интеграла равносильна сходимости каждого из интегралов суммы и не зависит от выбора точки c.



Для несобств. $\int$-лов I рода справедлива обобщенная формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

<u>Пример</u> Рассмотрим интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (интеграл Лейбница I рода)

При $\alpha \neq 1$ получим

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{+\infty} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ получим

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty} = \infty.$$ Значит,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Упражнения

Вычислить или установить расходимость

① $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2}$ ② $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}} = \frac{1}{3}$

③ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$

§2. Несобственные интегралы II рода.

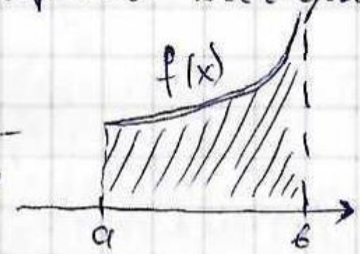
Пусть $f(x)$ опр-на при $x \in [a;b)$ и не ограничена при $x \to b-$. Пусть $f(x)$ интегрируема на $\forall$ отр $[a;\eta]$, $a < \eta < b$.

Опр Предел

$$\lim_{\eta \to b-} \int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx$$

наз. несобственным интегралом II рода на отрезке $[a;b]$

Геометрически несобственный интеграл II рода представляет собой площадь неограниченной криволин. трапеции:



Если $f(x)$ опр-на на полуинтервале $(a;b]$, не огр. при $x \to a+$ и интегрируема на $\forall$ отрезке $[\xi;b]$, $a < \xi < b$, то можно определить предел

$$\lim_{\xi \to a+} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx,$$

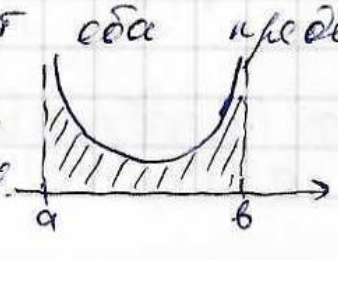
кот. наз. несобственным интегралом II рода на отрезке $[a;b]$.

Если $f(x)$ опр-на на $(a;b)$, не ограничена при $x \to a+$ и при $x \to b-$ и интегр-на на $\forall [\xi;\eta]$, $a < \xi < \eta < b$, то можно рассмотреть интеграл:

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+} \int\limits_{\xi}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to b-} \int\limits_c^{\eta} f(x)\,dx,$$

кот. существует, если существуют оба предела в правой части.

Сходимость этого $\int$-ла эквив-на сходимости каждого $\int$-ла в сумме.



Для несобственных интегралов II рода справедливы обобщенные формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a+), \text{ где}$$

$$F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x) \quad ; \quad F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

При $\alpha>0$ такой интеграл явл. несобственным интегралом II рода.

При $\alpha \neq 1$ получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha>1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \end{cases}$$

При $\alpha=1$ получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_0^1 = \infty.$$

Значит, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ $\begin{cases} \text{сходится при } \alpha<1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Упражнения

Вычислить или установить расходимость:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$ (расх.) 2) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$ (расх.)

3) $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$ 4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$

§3. Признаки сходимости несобств. интегралов от знакопостоянных функций

Рассмотрим неотрицательную ф-ю $f(x)$, заданную при $x \geq a$ и интегрируемую на $\forall$ отрезке $[a; b]$. В этом случае ф-я

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$ неубывает на $[a; +\infty)$.

Теор (необходимый признак сходимости несобств. $\int$-ла I рода). Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)$ сходится, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

Теор (признак сравнения по неравенству). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, $\forall b>a$. Пусть $\forall x \geq a$ $0\leq f(x) \leq g(x)$. Тогда,

если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$,

если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. □

Теор (предельный признак сравнения). Пусть ф-и $f(x)$ и $g(x)$ положительны при $x\geq a$ и интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;b]$, $b>a$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < \infty,$$

то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. □

Замечание. Аналоги признаков сравнения справедливы и для несобственных $\int$-лов II рода.

Упражнения

Установить сходимость/расходимость для несобственных интегралов I рода:

(1) $\int\limits_1^{+\infty} \arcsin\frac{1}{x}\,dx$ расх.
(2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^5}}\,dx$ (расх.)

(3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x^3+2x+3}}\,dx$ (~~расх.~~ сход.)
(4) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2\sin x + 2\cos 2x + 4}{x^2+x+2}\,dx$ (сх.)

(5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{(3x+4)\sin\frac{1}{3x}}{\sqrt[4]{x^5+4x^3+1}}\,dx$ (сход)

Установить сходимость/расходимость для несобственных интегралов II рода

(1) $\int\limits_0^{2} \frac{\ln(\sqrt[3]{x}+1)}{e^{\mathrm{arctg}\,x}-1}\,dx$
(2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^7 x}$
(3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^7 x}$

④ $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$ (сход.) ⑤ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$

§4. Сходимость интегралов от знакопеременных функций.

Рассмотрим функцию $f(x)$, кот. определена при $x \geq a$ и интегрируема на $\forall$ отрезке $[a;b]$. То же верно и для функции $|f(x)|$. Поэтому можно рассмотреть два несобств. $\int$-ла:

$$I_1 = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \ ; \quad I_2 = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Опр Если интеграл I_2 сходится, то I_1 наз. сходящимся абсолютно. Если I_1 сходится, но I_2 расходится, то I_1 наз. сходящимся условно.

Теор (о сходимости абсолютно сходящегося $\int$-ла). Если I_1 сходится абсолютно, то он сходится. □

Пример $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$ сходится абсолютно

Замечание Предыдущая теорема верна и для несобственного $\int$-ла II рода.

При отсутствии абсолютной сходимости установить условную сходимость можно с помощью признаков Абеля и Дирихле.

Теор (признак Дирихле). Пусть
1) ф-я $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a;b]$ и интеграл по этому промежутку ограничен (как функция верхнего предела b):

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < C$$

2) Ф-я $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$ сходится. □

Пример $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ сходится условно

Теор (признак Абеля) Пусть

1) ф-и $f(x)$ и $g(x)$ определены в пром. $[a;+\infty)$

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (абсолютно или усл.)

3) $g(x)$ монотонна и ограничена, т.е. $\exists C$: $\forall x \in [a;+\infty)$ $|g(x)| < C$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится. □

Замечание Аналоги рассмотренных теорем справедливы и для несобств. $\int$-ов II рода.