Лекция 7. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Вводные определения

Опр. Дифференциальным наз. уравнением, в кот. неизвестными явл. функции одной или нескольких ~~производных~~ переменных, а в ур-е входят сами ф-и и их производные до некоторого конечного порядка. ДУ наз. обыкновенным (ОДУ), если неизвестными явл. ф-и одной переменной, т.е. это уравнение вида

$$F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0.$$

ДУ наз. ДУ в частных производных, если неизвестными явл. ф-и нескольких переменных.

Опр. Максимальный порядок входящей в ур-е производной наз. порядком ДУ.

Опр. Решением ДУ наз. любая диф-мая ф-я, при подстановке кот. в ур-е получается верное тождество.

Пример $y' = e^x$ - ДУ I порядка,
$y = e^x + 1$, $y = e^x$, $y = e^x - \pi$ - его реш-я

Опр. Процесс нахождения решения ДУ наз. его интегрированием. График решения ДУ наз. интегральной кривой.

В §2.

Опр. Р-е $y = y(x, c)$ наз. общим решением ДУ I пор., если вып. 2 условия:

1) При любом фиксированном C ф-я $y = y(x, c)$ есть решение ДУ;
2) Для любой точки $(x_0; y_0) \in G$ найдется значение C_0, для кот. $y_0 = y(x_0, C_0)$.

Опр. Если общее решение задано в виде неявной функции, его наз. общим интегралом ДУ.

Пример $y = e^x + C$ - общее реш-е ДУ $y' = e^x$.

Опр. Функция, кот. описывает одно из решений ДУ, наз. частным решением. Если частное решение задано в виде неявной функции, его наз. частным интегралом.

§2. Дифференциальные уравнения I порядка

Общий вид ДУ I порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

Опр ДУ вида $y' = f(x, y)$ наз. ДУ, разрешённым относительно произв.

Опр Задача Коши для ДУ I пор. ставится следующим образом: найти решение ур-е $y' = f(x, y)$, удовл. начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Замечание ДУ I пор, разреш. отн-но произв., также может быть записано в виде

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

Теор (Коши о ∃ и ед-ти решения з.К. для ДУ I пор) Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции $f(x,y)$ и $\partial f/\partial y$ непрерывны. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

имеет единственное решение. □

Геом. интерпретация задачи Коши: найти интегральную кривую, кот. проходит через заданную точку (x_0, y_0).

Опр Если решение ДУ удаётся записать с помощью арифметических операций, операций взятия функции от функции и операций вычисления первообразной, применённых конечное число раз к элементарным ф-ям, то говорят, что ДУ интегрируется в квадратурах.

Большинство ДУ, кот. встречаются в теоретических и прикладных задачах, не интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим 4 типа ДУ, интегрируемых в квадратурах:

1) ДУ с разделяющимися переменными
2) Однородные ДУ
3) Линейные (неоднородные) ДУ
4) Уравнения Бернулли

Упражнения

Составить ДУ с общим решением ① $x^3 = C(x^2 - y^2)$ ② $y = Cx$

§3. ДУ с разделяющимися переменными

Опр. ДУ вида

$$f_1(x) f_2(y)\, dx = g_1(x) g_2(y)\, dy \quad \text{или}$$

$$y' = f(x)\, g(y)$$

наз. ДУ с разделяющимися переменными.

Если $g_1(x)=0$ или $f_2(y)=0$, то соотв. ф-я является решением ДУ. Если $g_1(x)\neq 0$, $f_2(y)\neq 0$, то:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\, dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\, dy$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\, dx = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\, dy + C,$$

где C — произвольная постоянная. Получим общий интеграл уравнения.

Уравнение $y' = f(x) g(y)$ с помощью домножения на dx сводится к ДУ пред. вида:

$$dy = f(x)\, g(y)\, dx$$

Упражнения

① $y' = xy$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

② $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0.$

$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 y + C$

③ $xyy' = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \ln Cx^2$

④ Решить задачу Коши. $(1+e^x)y\cdot y' = e^x$, $y(0)=1$

$y^2 - 1 = \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^2$

⑤ Решить задачу Коши: $y'\sin x = y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}$

§4. Однородные уравнения

Опр. Функция $h(x,y)$ наз. однородной функцией степени k, если

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k h(x,y) \quad \forall \lambda$$

Пример: $h(x,y) = 2y^2 + xy + x^2$ — однородная функция 2-ой степени.

Опр. Уравнение вида
$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$
наз. однородным, если ф-ии $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - однородные функции одной степени.

Однородное уравнение сводится к ДУ вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $x' = f\left(\frac{x}{y}\right)$, а такие ур-е, в свою очередь, сводятся к ДУ с раздел. переменными заменой $\frac{y}{x} = z$ или $\frac{x}{y} = z$

$$y = xz \qquad x = yz$$
$$y' = z + xz' \qquad x' = yz' + z$$

Упражнения

① $(x-y)\,y\,dx - x^2 dy = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{x}{y} + C$

② $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$

③ Решить задачу Коши: $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, $y(2) = 1 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)$

§5* Метод изоклин приближённого решения ДУ I порядка.

Дано ур-е: $y' = f(x,y)$

Для каждой точки (x,y) это ур-е определяет значение производной интегральной кривой, проходящей через эту точку. y' - угловой коэф-т касательной к кривой в этой точке, т.е. ур-е $y' = f(x,y)$ каждой точке (x,y) ставит в соответствие угловой коэф-т.

Опр. Изоклиной для $y' = f(x,y)$ наз. геометрическое место точек, где $f(x,y) = k$, $k = const$, т.е. изоклины - линии уровня ф-ии $f(x,y)$.

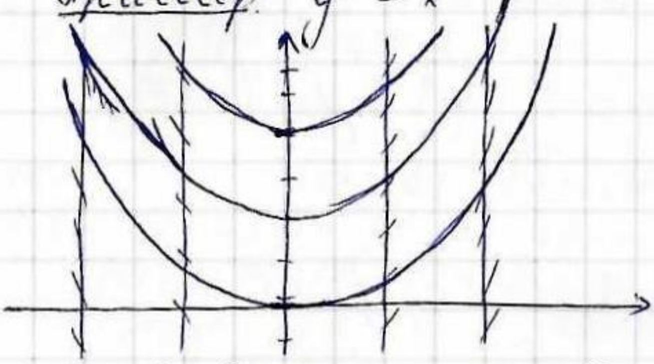
Опр. Полем направлений ДУ наз. множество касательных векторов к интегральным кривым уравнения.

Вдоль изоклины направление касательного вектора имеет постоянное значение.

Описание метода:

1) Для нескольких k построить кривые $f(x,y)=k$
2) Построить поле направлений вдоль изоклин
3) Построить кривые, которые пересекают каждую изоклину параллельно проведённым отрезкам. Эти кривые и есть интегральные кривые уравнения.

Пример: $y' = x$



Уравнение изоклин:

$x = k$
(вертик. прямые)

Очевидно, что общее решение
$$y = \frac{x^2}{2} + C$$