Лекция 8. Линейные уравнения. Особые точки и особые решения

§1. Линейные ДУ I порядка

Опр. Линейным ДУ I порядка наз. ДУ вида
$$y' + p(x)\, y = q(x)$$
Если $q(x) \equiv 0$, то линейное ур-е наз. однородным, иначе — неоднородным.

Однородное уравнение яв. ДУ с раздел. переменными. Для решения ЛНДУ применяют 2 метода:
1) метод вариации произв. постоянной (Лагранжа)
2) метод Бернулли

Оба метода обладают одинаковой трудоемкостью и сводятся к вычислению одних и тех же интегралов

1) метод вариации

Ищем решение соотв. однородного ур-я:
$$y' + p(x)\, y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$
Считая C функцией от x, подставляем в исходное ДУ:
$$C' e^{-\int p(x)dx} - Ce^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + Ce^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) = q(x)$$
$$\Rightarrow C' = e^{\int p(x)dx} q(x)$$
$$\Rightarrow C(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + \tilde{c}$$
общее решение ЛНДУ:
$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{c} \right) e^{-\int p(x)dx}$$

2) метод Бернулли

Пусть $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Подставляем в ДУ:
$$u'v + uv' + p(x)\, uv = q(x)$$
$$u'v + u\,(v' + p(x)\, v) = q(x)$$
Чтобы ф-ии $u(x)$, $v(x)$ можно было найти, наложим дополнит. условие на ф-ю v: $v' + p(x)v = 0$, тогда $u'v = q(x)$. Получаем систему ДУ (с разделяющимися переменными):

$$\begin{cases} v' + p(x)\,v = 0 & \Rightarrow v(x) \text{ (дост-но взять частн. реш.)} \\ u'v = q(x) \end{cases}$$

Упражнения

(1) $y' - \frac{y}{x} = x \Rightarrow y = x^2 + \tilde{C}x$

(2) $y' - y = e^{2x} \Rightarrow y = Ce^x + e^{2x}$

(3) $(1+y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)\,dy$

$$x = \frac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow C(y) = -\cos y + C_1$$

(4) ~~Решить задачу Коши~~ : $xy' + y - e^x = 0$ $y = \frac{C_1 + e^x}{x}$

(5) Решить задачу Коши: $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$,

$$y = \frac{x + \tilde{C}}{\cos x}, \quad y(0) = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\cos x}$$

(5) Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до температуры T_0, внесли в помещение, температура которого постоянна и равна a.

Закон Ньютона: Скорость охлаждения тела пропорциональна разности ~~их~~ температур тела и окружающей среды: $\frac{dT}{dt} = -k(T-a)$, $k>0$

Общее решение: $T = a + C_1 e^{-kt}$

Задача Коши: $T(0) = T_0 \Rightarrow T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$

§2. Уравнения Бернулли

Опр. Уравнением Бернулли наз. ДУ вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1$$

Для решения уравнений Бернулли используются 3 метода:

1) сведение к однородному
2) метод вариации произв. постоянной
3) метод Бернулли

Рассмотрим первый способ.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

Поделим на y^{α}:

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-\alpha} = q(x)$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d(y^{1-\alpha})}{dx} + p(x)\,y^{1-\alpha} = q(x)$$

Замена $z = y^{1-\alpha}$ сведёт уравнение к линейному.

Упражнения

① $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0 \Rightarrow y^2 = x\ln\frac{\tilde{C}}{x}$

② $y\,dx + (x - \frac{1}{2}x^3 y)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = C_1 y^2 + y$

③ Решить задачу Коши: $2y'\,ctg x - 4y = -y^2 \sin 2x$
$y(0) = 1.$

$z = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} = (tg x - x + \tilde{C})\cos^2 x$ — общее решение

$$\frac{1}{y} = (tg x - x + 1)\cos^2 x$$

§3. Особые точки и особые решения ДУ I пор.

Рассмотрим ДУ:

$$y' = f(x, y).$$

Пусть правая часть опр-на в некоторой области G плоскости переменных $(x; y)$.

Опр Если для точки $M(x_0, y_0) \in G$ найдутся 2 интегральные кривые, проходящие через эту точку и не совпадающие ни в какой окрестности, или через эту точку ~~не~~ не проходит ни одной интегральной кривой, то т. M наз. особой точкой данного ДУ. Если точка ~~обл~~ области G не явл. особой, она наз. обыкновенной.
Решение уравнения $y' = f(x, y)$ наз. особым, если каждая точка этой интегр. кривой явл. особой точкой.

Пример $y' = 3y^{2/3}$

Правая часть этого ДУ определена на всей плоскости (x, y), но условие теоремы о ∃-и и единственности нарушены в точках оси OX, т.к. при $y=0$ ф-я $f(x,y) = 3y^{2/3}$ не имеет ЧП по y.

Общее решение этого ДУ: $y=(x+C)^3$.
При любом C эта формула дает решение рассматриваемого уравнения, заданного при всех x. С другой стороны, $y \equiv 0$ — также решение этого ДУ. Это решение явл. особым, т.к. через каждую точку оси абсцисс проходит 2 интегральные кривые.