# Лекция 9. ДУ, допускающие понижение порядка

## §1. ДУ $n$-го порядка

Рассмотрим ОДУ $n$-го порядка
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Опр. Ф-я $y = y(x)$, диф-мая и раз. наз. решением ОДУ, если она обращает его в тождество.

Пример. $y'' + y = 0$ — ДУ 2-го порядка.
Ф-и $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sin x + \cos x$ — его реш-я

Опр. Семейство функций $y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$ наз. общим решением ДУ $n$-го пор.
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
если
1) при любом фиксированном наборе констант $C_{10}, \ldots, C_{n0}$ ф-я $y = y(x, C_{10}, \ldots, C_{n0})$ явл. решением ДУ
2) для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ из области опр-я правой части уравнения найдутся числа $C_{10}, \ldots, C_{n0}$ такие, что ф-я $y = y(x, C_{10}, \ldots, C_{n0})$ определена на некотором интервале, содержащем точку $x_0$ и удовл. н.у.
$$y(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0, \quad y'(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0', \ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)}$$

Опр. Ур-е вида
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$
наз. ОДУ, разрешённым относительно старшей производной.

Опр. Если общее решение задано в виде неявной функции
$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$
его наз. общим интегралом данного ДУ.
Придавая константам $C_1, \ldots, C_n$ некоторые фиксированные значения, получим частное решение и частный интеграл ДУ.

Рассмотрим ДУ, разреш. отн-но старш. произв.:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

Опр. Задачей Коши для ДУ (*) наз. задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', .., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Теор (Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ $n$-го пор.) Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-я $f(x, y, y', .., y^{(n-1)})$ непр. и имеет непрерывные ЧП по переменным $y, y', .., y^{(n-1)}$. Тогда для любой точки

$$(x_0, y_0, y_0', .., y_0^{(n-1)}) \in D$$

решение задачи Коши

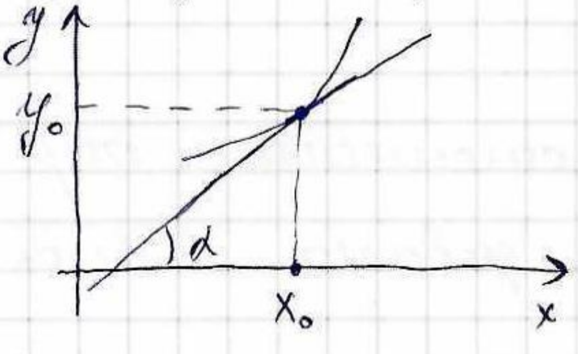
$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', .., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

существует и единственно. □

Геом. интерпретация задачи Коши для ДУ $n$-го порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Найти решение ДУ $y'' = f(x, y, y')$, проходящее через заданную точку $(x_0, y_0)$ с заданным углом $\alpha$ наклона касательной ($tg\alpha = y_0'$) к графику решения




## §2. Понятие краевой задачи

Опр. Краевой задачей наз. задача поиска такого решения ДУ $n$-го пор, кот. удовл. заданным значениям при различных значениях x.

Условия, кот. задаются при различных значениях x, наз. краевыми условиями. Краевые условия могут быть I и II рода.
Краевые условия I рода: $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$,
Краевые условия II рода: $y'(x_1)=y_1'$, $y'(x_2)=y_2'$
Краевые условия I рода геометрически означают, что требуется найти интегральную кривую уравнения, проходящую через 2 заданные точки. Краевые условия II рода означают, что требуется найти интегральную кривую, имеющую в точках $x_1$ и $x_2$ касательные с угловыми коэф-тами $y_1'$ и $y_2'$ сост-но.
Рассматривают и смешанную краевую задачу, когда в разных точках задают краевые условия разных типов.

В отличие от задачи Коши, которая при достаточно широких условиях имеет единственное решение, краевая задача может не иметь решений, иметь единств. решение или $\infty$ много решений.

Пример. Пусть задано ДУ $y''+y=0$.
Общее решение этого ДУ: $y=C_1\cos x + C_2\sin x$
1) $y(0)=1$, $y(\frac{\pi}{2})=1$ $\Rightarrow C_1=C_2=1$, т.е. краевая задача имеет единств. реш-е: $y=\cos x+\sin x$
2) $y(0)=1$, $y(\pi)=1$ $\Rightarrow$ краевая задача не имеет решений
3) $y(0)=1$, $y(\pi)=-1$ $\Rightarrow$ краевая задача имеет $\infty$ много решений, определяемых соотношением $y=\cos x + C\sin x$

## §3. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы ДУ, допускающих понижение порядка.

① Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ решаются $n$-кратным интегрированием ф-и $f(x)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x)\,dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

$$y = \underbrace{\int \left( \int \dots \int f(x\,dx)\,dx \dots \right) dx}_{n \text{ интегралов}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

Пример. $y''' = \sin x$

$$y'' = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$$

$$y' = \int (-\cos x + C_1)\,dx = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)\,dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

② Уравнения $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (уравнение явно не содержит $y(x)$ и ее производные до некоторого порядка)

Введем новую переменную: $p(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда $p' = y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$. Уравнение принимает вид:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0,$$

т.е. его порядок понижается на $k$.

Пример $y''(x^2+1) = 2xy'$

Уравнение явно не содержит $y \Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $p = y'$, $p' = y''$. Получаем ДУ I порядка:

$$p'(x^2+1) = 2xp \quad \text{(ДУ с разд. перем.)}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} \Rightarrow p = C_1(x^2+1)$$

$$y' = C_1(x^2+1)$$

$$y = \int C_1(x^2+1)\,dx = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2 \text{ - общее решение}$$

Решение $p=0$, потерянное при делении на $p$, входит сюда при $C_1 = 0$.

③ Уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (явно не содержит независимую переменную $x$).

Введем новую переменную $p = y'$. Будем считать, что $p = p(y)$. Тогда

$y' = p(y)$, $y'' = p'(y)\cdot y' = p'p$,
$y''' = p'' y' p + p'\cdot p'\cdot y' = p''p^2 + (p')^2 p$ и т.д.
В результате уравнение преобразуется к виду:
$$\tilde F(y, p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0,$$
т.е. удалось понизить порядок на 1.

__Пример.__ $y'' = -2(y')^2 \operatorname{tg} y$
Уравнение явно не содержит $x$ $\Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $y' = p$, $y'' = p'p$.
Получим ДУ I порядка:
$$p'p = -2p^2 \operatorname{tg} y$$
$$p' = -2p \operatorname{tg} y \quad \text{(ДУ с раздел. переменными)}$$
$$\int \frac{dp}{p} = -2\int \operatorname{tg} y\, dy \Rightarrow p = C_1 \cos^2 y \Rightarrow y' = C_1\cos^2 y$$
снова получим ДУ с раздел. переменными:
$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = C_1 \Rightarrow \operatorname{tg} y = C_1 x + C_2 \text{ — общий интеграл}$$

## Упражнения

Найти общее решение ДУ:

1. $xy'' + y' = 0 \Rightarrow y = C_1 \ln x + C_2$
2. $yy'' = (y')^2 \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$
3. $xy''' + y'' = 1 + x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + C_1(x\ln x - x) + C_2 x + C_3$

Решить краевую задачу:

4. $2(y'' - y' \operatorname{ctg} x) = \sin 2x$, $y(0) = -1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Общее решение ДУ: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - C_1\cos x + C_2$
Подстановка краевых условий дает $C_1 = 1$, $C_2 = 0$
$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \cos x$$

Решить задачу Коши:

(5) $2yy'' = 1 + (y')^2$, $y(0) = y'(0) = 1$

$y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$

(6) $y^2 + (y')^2 - 2y \cdot y'' = 0$, $\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow y = e^x$

(7) $2y' + ((y')^2 - 6x)y'' = 0$, $\left.\begin{array}{l} y(2) = \frac{8}{3} \\ y'(2) = 2 \end{array}\right]$ $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x\sqrt{x}$

(8) $yy'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.