Лекция 10. Линейные однородные дифференциальные уравнения

§1. Линейные диф. уравнения

Опр Линейным диф. уравнением n-го пор. наз. уравнение вида
$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = b(x), \quad (*)$$
где функции $a_i(x)$ определены на числовом промежутке J.

Опр Если $b(x) \equiv 0$, то линейное ДУ наз. однородным (ЛОДУ), иначе — неоднородным.

Теор. (о $\exists$-и и ед-ти решения задачи Коши для лин. ДУ n-го пор.). Пусть ф-и $a_i(x)$, $b(x)$ непр. на некотором пром-ке $J \subset \mathbb{R}$. Тогда для $\forall x_0 \in J$ и любых чисел $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ решение задачи Коши
$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = b(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
существует и единственно. $\square$

Пусть X — мн-во всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на J; Y — мн-во всех непрерывных функций на этом пром-ке. X и Y — линейные пространства отн-но операций сложения функций и умножения на число. Нулем этого прост-ва явл. ф-я, тождественно равная нулю на J.

Введем в рассмотрение диф. оператор:
$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y$$
Покажем, что $L[y]$ — линейный оператор.

1) Пусть y_1, y_2 — произв. n раз диф-мые ф-и
$$L[y_1+y_2] = (y_1+y_2)^{(n)} + a_1(x)\,(y_1+y_2)^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(x)\,(y_1+y_2)' + a_n(x)\,(y_1+y_2) = \left(y_1^{(n)} + a_1(x)\,y_1^{(n-1)} + \ldots\right.$$
$$+ a_{n-1}(x)\,y_1' + a_n(x)\,y_1\big) + \big(y_2^{(n)} + a_1(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y_2' +$$
$$\left.+ a_n(x)\,y_2\right) = L[y_1] + L[y_2]$$

2) Пусть $y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$L[\alpha y] = (\alpha y)^{(n)} + a_1(x)(\alpha y)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)(\alpha y)' + a_n(x)(\alpha y) =$
$= \alpha\left(y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y\right) =$
$= \alpha L[y]$.

$\Rightarrow L[y]$ — линейный оператор.

Опр. Линейный оператор $L[y]$ наз. линейным дифференциальным оператором n-го пор.

Тогда ЛОДУ можно записать в виде $L[y]=0$, ЛНДУ — в виде $L[y]=b(x)$.

§2. Свойства решений линейных ДУ.

① Теор. Если y_1, y_2 — решения ЛОДУ n-го пор., то $\forall \alpha, \beta$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ — тоже решение этого ДУ.

Д-во: Рассмотрим уравнение $L[y]=0$.
По условию $L[y_1]=0$, $L[y_2]=0$. Тогда
$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$ — тоже решение ЛОДУ. ■

Замечание. Эта теорема означает, что мн-во решений ЛОДУ образует линейное пространство.

② Теор. Если y_1, y_2 — решения уравнения $L[y]=b(x)$, то $y_1 - y_2$ — решение уравнения $L[y]=0$.

Д-во: По условию теоремы $L[y_1]=b(x)$, $L[y_2]=b(x)$. Тогда
$L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = b(x) - b(x) = 0$. ■

③ Теор. Если y_1 — решение уравнения $L[y]=0$, а y_2 — решение уравнения $L[y]=b(x)$, то y_1+y_2 — решение уравнения $L[y_1+y_2]=b(x)$.

Д-во: По условию теор. $L[y_1]=0$, $L[y_2]=b(x)$.
Тогда $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2] = b(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1+y_2$ — решение уравнения $L[y]=b(x)$. ■

§3 Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций.

Опр. Система функций $y_1 = y_1(x), .., y_n = y_n(x)$ наз. линейно-зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0$, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0$. В противном случае система функций наз. линейно-независимой.

Пример. Функции $y_1 = x$, $y_2 = 2x$ — л/з на ∀ множ-ве. Функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ — л/н. В самом деле, рассмотрим линейную комбинацию $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 \equiv 0$ — это возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т.к. в противном случае $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2$ — многочлен второй степени, кот. не может иметь более 2 действит. корней.

Опр. Пусть функции $y_1(x), .., y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка включит-но. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

наз. определителем Вронского системы функций $y_1(x), .., y_n(x)$.

Теор. (об определителе Вронского линейно-зависимой системы функций). Пусть функции $y_1(x), .., y_n(x)$ имеют $(n-1)$-ю производную на J. Если $y_1(x), .., y_n(x)$ — линейно-зависимы на J, то их определитель Вронского $= 0$.

Д-во: Система функций $y_1(x), .., y_n(x)$ — л/з на J ⇒ ∃-ют числа $\lambda_1, .., \lambda_n$, не все равные 0, такие, что $\lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$ $\forall x \in J$.
Дифференцируя это рав-во $(n-1)$ раз, пол.:

$$\lambda_1 y_1'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) = 0$$

$$\ldots$$

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Значит, столбцы определителя Вронского

линейно-зависимы $\Rightarrow$ определитель Вронского тождественно $=0$. ■

Следствие. Если определитель Вронского с-ст функций $y_1(x), .., y_n(x)$ не равен 0 на J, то эти функции линейно-независимы на J.

Теор. (об определителе Вронского линейно-независимой системы решений ЛОДУ n-го пор.)
Пусть $y_1(x), .., y_n(x)$ — решения ЛОДУ $L[y]=0$ с непрерывными коэф-тами $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Для того, чтобы эти функции были линейно-независимы на J, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского не обращался в 0 ни в одной точке мн-ва J.
Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость. От противного.
Пусть $\exists x_0 \in J : W(x_0)=0$. Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n(x_0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \\ \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Её определитель $\Delta = W(x_0) = 0 \Rightarrow$ эта СЛАУ имеет нетривиальное решение $\lambda_1^*, .., \lambda_n^*$.
Рассмотрим функцию

$$y(x) = \lambda_1^* y_1(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x)$$

Эта функция явл. решением уравнения $L[y]=0$ по теореме о свойствах решений ЛОДУ, причём

$y(x_0) = \lambda_1^* y_1(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x_0) = 0$ (из 1-го ур-я),
$y'(x_0) = \lambda_1^* y_1'(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n'(x_0) = 0$ (из 2-го ур-я),

$y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_1^* y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из n-го ур-я).
Следовательно, $y(x)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, .., y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Однако функция $y \equiv 0$ — тоже решение такой задачи Коши $\Rightarrow$

$$\lambda_1^* y_1(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x) \equiv 0.$$

Но система функций $y_1(x), .., y_n(x)$ — л/з.
Получили противоречие, кот. д-ет необходимость.

($\Leftarrow$). Достаточность.
Пусть $W(x) \neq 0$ на I. Покажем, что $y_1(x),.., y_n(x)$ л/н. От противного.
Пусть $y_1(x),.., y_n(x)$ — л/з $\Rightarrow W(x) \equiv 0$.
Это противоречие д-ет достаточность. ■

Замечание. Таким образом, если $y_1(x),.., y_n(x)$ — решение ЛОДУ n-го пор., то имеет место один из следующих случаев:
1) $y_1(x),.., y_n(x)$ л/з и $W(x) \equiv 0$.
2) $y_1(x),.., y_n(x)$ л/н и $W(x) \neq 0$ ни в одной точке интервала I.

Упражнения

1. Исследовать систему функций на линейную зависимость:

1. $x, x+1$ (л/н)
2. $0, 1, x$ (л/з)
3. x, x^2, x^3 (л/н)
4. $\cos x, \sin x$ (л/н)
5. e^x, e^{2x}, e^{3x} (л/н)

§4. Общее решение ЛОДУ.

Опр. Систему из n линейно-независимых решений $L[y]=0$ наз. фундаментальной системой решений этого уравнения (ФСР).

Теор (о существовании ФСР ЛОДУ n-го пор.). Для ЛОДУ $L[y]=0$ с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ $\exists$ ФСР.
Д-во. Пусть $y_1(x),.., y_n(x)$ — решения ЛОДУ $L[y]=0$, удовлетворяющие нач. условиям:

$$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0, .., y_1^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1, .., y_2^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0, .., y_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Существование таких решений следует из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть $W(x)$ — определитель Вронского системы функций $y_1(x), .., y_n(x)$, тогда

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ система функций $y_1(x), .., y_n(x)$ линейно независима $\Rightarrow y_1(x), .., y_n(x)$ — ФСР ур-я $L[y]=0$. ■

<u>Теор. (о структуре общего решения ЛОДУ n-го пор.)</u>
Пусть $y_1(x), .., y_n(x)$ — ФСР ЛОДУ n-го пор. с непрерывными на I функциями $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид: $y_{oo} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$,
где $C_1, .., C_n$ — произвольные постоянные.

<u>Д-во</u>: По теореме о свойствах решений ф-я
$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$
явл. решением ЛОДУ $L[y]=0$ при $\forall C_1, .., C_n$.
Покажем, что любое решение может быть представлено в таком виде.

Пусть $\tilde{y}(x)$ — решение задачи Коши:
$$\begin{cases} L[y]=0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', .., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Составим СЛАУ:
$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Определитель этой СЛАУ
$$\Delta = W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$
эта СЛАУ имеет единственное решение $C_1^0, .., C_n^0$. Но тогда решение уравнения $L[y]=0$
$$y_0(x) = C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)$$
удовлетворяет тем же нач. условиям, что и $\tilde{y}(x) \Rightarrow$ по теореме о ~~единст-ти~~

существования и ед-ти решения задачи Коши $y_0(x) = \tilde{y}(x)$, т.е. любое решение представляется в виде линейной комбинации функций из ФСР. ∎

<u>Замечание.</u> Таким образом, множество решений ЛОДУ n-го пор. образует линейное пространство размерности n, базис которого образует ФСР.

<u>Упражнения</u>

Составить ЛОДУ по ФСР:

① $y_1 = \sin x,\ y_2 = \cos x \Rightarrow y'' + y = 0$

② $y_1 = x,\ y_2 = x^2 \Rightarrow x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

③ $y_1 = e^x,\ y_2 = e^x \sin x,\ y_3 = e^x \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow y''' - 3y'' + 4y' - 2y \equiv 0.$$