Лекция 11. Формула Остроградского-Лиувилля. Решение ЛОДУ.

§1. Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ II-го порядка.

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка:

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0,$$

где $a_i(x)$ – непр. на I.

Для определителя Вронского функций y_1, y_2 (решений ЛОДУ) имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)\,y_1' - a_2(x)\,y_1 & -a_1(x)\,y_2' - a_2(x)\,y_2 \end{vmatrix}_{+a_2(x)\cdot\mathrm{I}} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)\,y_1' & -a_1(x)\,y_2' \end{vmatrix} = -a_1(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} + a_1(x)\,W = 0.$$

Это ДУ с разделяющимися переменными. Решив его, получим

$$\frac{dW}{W} = -a_1(x)\,dx \Rightarrow W = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

Иногда эту формулу записывают в другом виде. Пусть x_0 – произвольная точка пром. I. Тогда $\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx$ – одна из первообразных функции $a_1(x)$ $\Rightarrow$ $W = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}$

При $x = x_0$ $W(x_0) = C$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W(x) = W(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}}$$ – формула Остроградского-Лиувилля.

Замечание. Хотя мы вывели эту формулу в случае ЛОДУ 2-го порядка, она верна для ДУ и более высоких порядков.

§2. Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го пор по известному частному решению

Рассмотрим уравнение
$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0.$$
Пусть $y_1(x)$ – известное частное решение. Как можно найти общее решение этого уравнения?

Есть 2 способа.

1 способ основан на приведении ур-я к виду, допускающее понижение порядка.

Пусть
$$y = z y_1$$
$$y' = z' y_1 + z y_1'$$
$$y'' = z y_1'' + 2 z' y_1' + z'' y_1$$
Подставим в ДУ:
$$z y_1'' + 2z' y_1' + z'' y_1 + a_1(x)(z' y_1 + z y_1') + a_2(x) z y_1 = 0.$$
Вынесем за скобки:
$$z\underbrace{(y_1'' + a_1(x)\, y_1' + a_2(x) y_1)}_{=0} + 2z' y_1' + z'' y_1 + a_1(x) z' y_1 = 0$$
Получим ДУ:
$$2 z' y_1' + z'' y_1 + a_1(x) z' y_1 = 0,$$
кот. допускает понижение порядка заменой $z' = p$, $z'' = p'$. Решив уравнение, найдем общее решение.

2 способ основан на формуле Остроградско-го-Лиувилля

Определитель Вронского равен:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$
где y_1 – известно, а y_2 надо найти.

Поделим на y_1^2.
$$\frac{W}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}\, dx + B$$

Для линейной независимости y_1 и y_2 достаточно $W(x) \neq 0$, пусть

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx}$$

Тогда общее решение ЛОДУ 2-го пор. принимает вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Замечание. ЛОДУ 2-го пор может быть задано в виде:

$$b_0(x) y'' + b_1(x) y' + b_2(x) y = 0.$$

Тогда перед применением полученной формулы его нужно поделить на $b_0(x)$:

$$y'' + \frac{b_1(x)}{b_0(x)} y' + \frac{b_2(x)}{b_0(x)} y = 0.$$

Упражнения

Найти общее решение ЛОДУ 2-го пор. при известном частном решении:

1. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0, \quad y_1 = \frac{1}{x} \qquad (x^3)$
2. $2\sqrt{x}\, y'' - (4\sqrt{x} + 1) y' + (2\sqrt{x} + 1) y = 0, \quad y_1 = e^x$

   $$y = C_1 e^x + C_2 e^{x+\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1)$$
3. $y'' - (1 + 2\,tg x) y' + (tg x - 1) y = 0, \quad y_1 = \sec x$

   $$y = C_1 \sec x + C_2 \frac{e^x}{\cos x}$$

§3. ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ДУ

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Опр. Характеристическим уравнением этого ДУ наз. квадратное уравнение след. вида

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (2)$$

Для корней характ. уравнения возможен один из трех случаев:

1) корни характ. уравнения действительны и различны
2) уравнение имеет 1 действ. корень кратн. 2
3) уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней

В зависимости от решения характ. уравнения общее решение искомого ДУ может быть нескольких видов. Эту взаимосвязь устанавливают следующие теоремы.

① Теор. (общее решение ЛОДУ 2-го пор. с пост. коэф-тами в случае действит. корней). Пусть λ_1, λ_2 — действит. различные корни (2). Тогда общее решение ЛОДУ (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Д-во: Функции $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ — линейно-независ. при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т.к.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

Пусть $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, тогда

$$y_1' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

$$y_1'' = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \Rightarrow \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 = 0.$$

Подстановка y_1 обращает уравнение (1) в тождество, т.к. λ_1 — корень (2).

Аналогично можно показать, что $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ также является решением (1) $\Rightarrow$ по теор. о структуре общего решения ЛОДУ общее решение этого ДУ имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad \blacksquare$$

② Теор. (общее решение ЛОДУ 2-го пор. с пост. коэф-тами в случае кратных корней). Пусть λ_0 — действит. корень ур-е (2) кратности 2.

Тогда общее решение ур-е (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

Д-во: по теор. 1 $e^{\lambda_0 x}$ — решение ур-е (1). Найдём второе решение по формуле-следствию из ф-лы Остроградского - Лиувилля (в случае кратных корней $a_1 = -2\lambda$):

$$y_2 = e^{\lambda_0 x} \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{e^{2\lambda_0 x}} dx = e^{\lambda_0 x} \int \frac{\overbrace{e^{-a_1 x}}^{=1}}{e^{2\lambda_0 x}} dx = x e^{\lambda_0 x}$$

Эти решения л/н, т.к.

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x}(1+\lambda_0 x) \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0$$

⇒ Функции y_1, y_2 образуют ФСР ур-е (1) ∎

③ <u>Теор. (общее решение ЛОДУ 2-го пор с пост. коэф. в случае комплексных корней)</u>. Если $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-сопряжённых ур-е (2). Тогда общее решение ур-е (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Д-во: Если $\alpha \pm \beta i$ — корни уравнения (2), то функции $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ — решения уравнения (1).

Покажем, что если комплексно-значная функция $u(x) + i v(x)$ является решением уравнения (1), то и $u(x)$, и $v(x)$ — тоже его решения.

$$L[y] = 0 \Rightarrow L[u + iv] = L[u] + i L[v]$$

Комплексное число $=0$, когда его действит. и мнимая части $=0$ ⇒ $L[u(x)] = 0$
$L[v(x)] = 0$ ⇒

$u(x), v(x)$ — решения (1).

Рассмотрим функцию $e^{(\alpha+\beta i)x}$:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) =$$

$$= \underbrace{e^{\alpha x} \cos \beta x}_{u(x)} + i \underbrace{e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v(x)} \Rightarrow \text{Ф-и } e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$e^{\alpha x} \sin \beta x$ явл. решениями ур-е (1). Они линейно-независимы, т.к.

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) & e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \text{ (если } \beta \neq 0).$$

$\Rightarrow$ функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ образуют ФСР уравнения (1). ■

Упражнения

Найти общее решение ДУ

① $y'' - y = 0$ ② $y'' + 4y' + 4y = 0$ ③ $y'' + 4y = 0$.

Найти решение задачи Коши:

④ $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x}$ – общее реш-е; $y = e^{4x} + 4e^{x}$ – частное решение

⑤ Составить ЛОДУ, имеющего след. корни ДУ: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$

$$y'' + 2y' = 0.$$

§4. ЛОДУ с пост. коэффициентами

Рассмотрим теперь ЛОДУ n-го пор. с пост. коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Опр. Характеристическим уравнением ур-е (1) наз. алгебраическое уравнение вида

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2).$$

Пусть известны все решения ур-е (2) с учётом их кратностей. Тогда ФСР уравнения (1) строится по след. правилам:

1) Если λ_1 – действ. корень ур-е (2), то $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ – решение уравнения (1).

2) Если λ_1 – действ. корень кратн. r ур-е (2), то ф-и $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, .., $y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$ – решения уравнения (1).

3) Если $\alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопр. корней уравнения (2), то $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ –

решения ур-е (1).
4) Если $\alpha \pm \beta i$ — пара комп.-сопряжённых корней кратности r каждой ур-е (2), то ф-и $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = x e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha}\sin\beta x$, ..., $y_{2r-1} = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$. — решения уравнения (1).

Упражнения

Найти общее решение ЛОДУ:

(1) $y^{IV} + y'' = 0$

(2) $y^{IV} + 8y''' + 16y = 0$.

(3) $y^{IV} + y' = 0$

(4) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Составить ЛОДУ (с пост. коэф-тами), имеющего след. корни характ. уравнения. Указать общее решение получ. уравнения.

(1) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

(2) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -3$

(3) $\lambda_1 = 2+3i,\ \lambda_2 = 2-3i,\ \lambda_3 = 1$

$$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$$

Составить ЛОДУ по ФСР:

(1) $e^x, e^{2x}, e^{3x} \Rightarrow y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

(2) $e^x\cos x, e^x\sin x, 1 \Rightarrow y''' - 2y'' + 2y' = 0$.