Лекция 12. Линейные неоднородные уравнения n-го пор

§1. Общее решение ЛНДУ n-го пор

Рассмотрим уравнение
$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x),$$
или
$$L[y] = b(x),$$
где $a_i(x)$, $b(x)$ непр. на J.

Теор. (о структуре общего решения ЛНДУ). Пусть $y_{чн}$ — частное решение ЛНДУ n-го пор. $L[y] = b(x)$, а y_{oo} — общее решение урав-е $L[y] = 0$. Тогда общее решение ЛНДУ n-го пор имеет вид:
$$y = y_{чн} + y_{oo},$$
т.е. любое решение этого уравнения может быть представлено в виде:
$$y(x) = y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n,$$
где $y_1, \ldots, y_n$ — ФСР соответствующего однор. ур-е, $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Д-во: Ф-я $y(x)$ при $\forall$ значениях $C_1, \ldots, C_n$ явл. решением ур-е $L[y] = b(x)$. В самом деле,
$$L[y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n] = L[y_{чн}] + C_1 L[y_1] + \ldots + C_n L[y_n] =$$
$$= b(x) + 0 + \ldots + 0 = b(x).$$
Покажем теперь, что любое решение может быть представлено в таком виде. Пусть $y(x)$ — произв. решение ур-е $L[y] = b(x)$. $y_{чн}$ — тоже решение ур-е $L[y] = b(x)$ $\Rightarrow$ по теор. о св-вах решений их разность — решение уравнения $L[y] = 0$ $\Rightarrow$ (по теор. о структуре общ. реш. ЛОДУ)
$$y(x) - y_{чн} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \Rightarrow$$
$$y(x) = y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n. \quad ■$$

Теор. (принцип наложения решений). Пусть $\bar{y}_1$ — решение ЛНДУ $L[y] = b_1(x)$, ..., $\bar{y}_m$ — решение ЛНДУ $L[y] = b_m(x)$. Тогда ф-я $\bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_m$ — решение уравнения $L[y] = b_1(x) + \ldots + b_m(x)$.

Д-во: $L[\bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_m] = L[\bar{y}_1] + \ldots + L[\bar{y}_m] = b_1(x) + \ldots + b_m(x) \Rightarrow \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_m$ — решение ур-е $L[y] = b_1(x) + \ldots + b_m(x)$. ■

§2. Решение ЛНДУ n-го пор. с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Рассмотрим ЛНДУ n-го пор. с пост. коэф-тами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $b(x)$ непр. на I.

Опр. Квазимногочленом будем называть сумму нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — заданные многочлены, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пусть правая часть рассматриваемого ЛНДУ задана в виде квазимногочлена. Тогда частное решение этого ЛНДУ можно искать в виде:

① Пусть $b(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — заданный многочлен степени n

а) Если α — не корень соотв. х. у., то частное решение ЛНДУ имеет вид $y_{чн} = e^{\alpha x} Q_n(x)$

б) Если α — корень соотв. х. у. кратности r, то частное решение ЛНДУ им. вид $y_{чн} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$,

$Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопр. коэффициентами

② Пусть $b(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — заданные многочлены степеней n и m соответственно

а) Если $\alpha \pm \beta i$ не явл. корнями соотв. х. у., то частное решение ЛНДУ имеет вид

$y_{чн} = e^{\alpha x} (S_N(x) \cos \beta x + T_N(x) \sin \beta x)$

б) Если $\alpha \pm \beta i$ — корни соотв. х. у. кратности r каждый, то частное решение ЛНДУ им. вид

$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} (S_N(x) \cos \beta x + T_N(x) \sin \beta x)$,

$T_N(x)$, $S_N(x)$ — многочлены степени N с неопр. коэффициентами, $N = \max\{n, m\}$.

Для нахождения неопр коэффициентов в многочленах применяем метод неопр. коэффициентов.

Упражнения

Указать вид частного решения (без вычисления коэф-тов):

① $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$ ② $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^{x} + xe^{2x}$

③ $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

(к задаче 9)

④ $y^{IV} - 8y'' + 16y = xe^{2x} + x\sin x + x^2 + e^x \sin 2x - 3 + 5\cos x$

⑤ $y''' - y'' + 2y' = 4x + x^2 e^{x/2} - 2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + 1 - 5xe^x \sin 2x$

⑥ $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = x^2 + xe^{-x} + x\sin 5x + 2\cos 5x + 1 + e^{-x}\sin 5x$

⑦ $y^{IV} - 8y''' + 25y'' = x + 2e^{4x} + e^{4x}\sin 3x - 2 + e^{4x}x\cos 3x + \sin 3x$

⑧ $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 3x^3 + xe^x + x\sin x + 4\cos x + 1 - e^x \sin 2x$

Найти общее решение указанных ЛНДУ

⑨ $y'' + y = e^x$ ⑩ $y'' - y = \sin x$

⑪ $y'' - y = e^x$ ⑫ $y'' + y' = \sin^2 x$

⑬ $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$; $y = (C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x)e^x + \frac{1}{37}(\sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{1}{9}e^x$

(к задаче 8) Решить задачу Коши

⑭ $y'' - 5y' + 6y = -2xe^{2x} - 6$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$

$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x(x+2)e^{2x} - 1$; $y = e^{2x} + e^{3x} + x(x+2)e^{2x} - 1$

⑮ $y'' - 6y' + 8y = 4 - 16x - 2e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

⑯ $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + 2x - 5$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

§3. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Пусть $y_1, .., y_n$ — ФСР однородного ур-я $L[y]=0$. Тогда частное решение неоднородного ур-я $L[y]=b(x)$ можно искать в виде:

$$y(x) = c_1(x) y_1 + \ldots + c_n(x) y_n,$$

где ф-ии $c_i(x)$ определяются из системы:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

Определитель этой системы равен определителю Вронского с-ы функций $y_1, .., y_n$, т.е. он $\neq 0$ ни в одной точке I. Тогда c_i' определяются однозначно, а сами $c_i(x)$ — с точностью до произвольных постоянных.

Докажем корректность метода для $n=2$. Пусть дано ЛНДУ 2-го пор.:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = b(x)$$

общее решение соотв. однородного ур-я:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Будем искать решение неодн. ур-я в виде:

$$y(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2.$$

Тогда

$$y' = \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2}_{=0} + c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y'' = \underbrace{c_1' y_1' + c_2' y_2'}_{=b(x)} + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' = b(x) + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

Подставим в заданное ЛНДУ:

$$b(x) + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = b(x) + c_1 \underbrace{(y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2)}_{=0} =$$

$$= b(x).$$

$\Rightarrow$ Решение ЛНДУ можно искать в ук. виде.

Упражнения

1. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

   $y_{он} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$

2. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

3. $y''' + 4y' = 2\,\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$

   $y_{он} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln|\cos 2x|$

Зная частное решение однор. уравнения, вычислить общее решение неоднородного:

4. $y'' - y' + e^{2x} y = e^{3x}$, $y_1 = \cos e^x$

   $y_{он} = C_1 \sin e^x + C_2 \cos e^x + e^x$

5. $x^2 y'' - x y' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$

   $y_{он} = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x} + x^4$